אינפי - שיעור 1:

אינטגרלים:

אינטגרלים לא מסויימים:

$F'(x) \rightarrow$ נגזרת.

למשל: $(x^2)' = 2x$

עכשיו:

$F'(x)$ ידוע

$F(x)$:צ"ל

נתונה נגזרת של פונקציה, צ"ל את הפונקציה.

הגדרה:

פונקציה $F(x)$ נקראת קדומה לפונקציה $f(x)$ כאשר $F'(x)=f(x)$.

למשל:

$2x$ נגזרת של x^2.

x^2+C היא פונקציה קדומה ל- $2x$.

מספר קבוע כלשהו לא תלוי ב-x

$F'(x)$ נגזרת של $F(x)$

$F(x)$ קדומה ל- $F'(x)$.

טענה:

אם $F(x)$ ו- $G(x)$ קדומות לאותה פונקציה $f(x)$ אז $G(x)-F(x)=C$.

$$(G(x)-F(x))' = f(x)-f(x) = 0$$

$\Downarrow$ מש"ל

$$G(x)-F(x)=C$$

אם $F(x)$ קדומה ל- $f(x)$ אז $\int f(x)\cdot dx = F(x)+C \iff$

דיפרנציאל של x.

$\iff F'(x)=f(x)$. למשל:

$$\int 2x\cdot dx = x^2+C$$

$$\left(\int f(x)\cdot dx\right)' = f(x) \qquad ; \int F'(x)\cdot dx = F(x)+C$$

כמו הדבר

$$F'(x) = \frac{\sin(x)}{x}$$

$$(\sin(x))' = \cos(x)$$

$$\int \cos(x)\,dx = \sin(x)+C$$

$$(\ln(x))' = \frac{1}{x}$$

$$\int \frac{1}{x}\,dx = \ln(x)+C$$

חוקי האינטגרציה:

1. $$(a\cdot F(x))' = a\cdot F'(x)$$

$$\int a\cdot f(x)\,dx = a\cdot\int f(x)\,dx$$

דוגמא:

$$\int x\,dx = \int \frac{1}{2}\cdot 2x\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\int 2x\,dx = \frac{1}{2}(x^2+C) = \frac{1}{2}x^2+C$$

2. $$\int (f(x)\pm g(x))\,dx = \int f(x)\,dx \pm \int g(x)\,dx$$

3) אינטגרציה בחלקים:

$$(f(x)\cdot g(x))' = f'\cdot g + f\cdot g'$$

$$f(x)\cdot g(x) = \int f'(x)g(x)\,dx + \int f(x)g'(x)\,dx =$$

$$\int f'(x)\cdot g(x)\,dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)\,dx$$

4) שיטת ההצבה:

$$(f(g(x)))' = f'(g(x))\cdot g'(x)$$

$$f(g(x))+C = \int f'(g(x))\cdot g'(x)\,dx$$

$$\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \arctan(x) + C$$

אינטגרלים מיידים:

1. $$\int 1 \cdot dx = x + C$$

2. $$\int x^n \cdot dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \,, \quad n \neq -1$$

3. כאשר $x=-1$: $$\int x^{-1} dx = \int \frac{1}{x}\, dx = \ln(|x|) + C$$

חי"ב להיות גם חיובי.

4. $$\int e^x\, dx = e^x + C$$

5. $$\int a^x\, dx = \frac{a^x}{\ln(a)} + C$$

$1 \neq a > 0$

נוכיח: $$a^x = \frac{a^x \cdot \cancel{\ln(a)}}{\cancel{\ln(a)}}$$

6. $$\int \sin(x)\,dx = -\cos(x) + C \;;\; \int \cos(x)\,dx = \sin(x) + C$$

7. $$\int \frac{1}{1+x^2}\, dx = \arctan(x) + C$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\, dx = \arcsin(x) + C$$

<u>תרגיל 1:</u>

$$\int (\sqrt{x} - x)^2 \cdot dx$$

$$= \int \left((\sqrt{x})^2 + 2\sqrt{x}\,x + x^2\right) dx$$

$$= \int (x + 2 \cdot x^{1.5} + x^2)\, dx$$

$$= \int x\, dx + 2 \int x^{1.5}\, dx + \int x^2\, dx$$

$$= \frac{x^2}{2} + 2 \cdot \frac{x^{2.5}}{2.5} + \frac{x^3}{3} + C$$

דוגמא 2:

$$\int \frac{x^4}{1+x^2}\,dx$$

$$= \int \frac{x^4-1+1}{1+x^2}\,dx$$

$(x^2+1)(x^2-1)$

$$= \int \frac{x^4-1}{1+x^2} + \frac{1}{1+x^2}\,dx$$

$$= \int x^2 - 1 + \frac{1}{1+x^2}\,dx$$

$$= \frac{x^3}{3} - x + \arctan(x) + C$$

אינטגרציה בחלקים:

$$\int x \cdot e^x\,dx \longrightarrow x = f',\ g = e^x$$

לא

$$\boxed{x = g,\ f' = e^x}$$

$$g' = 1 \qquad f = e^x$$

$$= x \cdot e^x - \int e^x\,dx$$

$$= e^x \cdot x - e^x + C$$

דוגמא 3:

* כאשר אחד הגורמים הוא: $\sin(x)/\cos(x)$ צריך לבחור בו כנגזרת

$$\int x^2 \cdot \cos(x)\,dx \longrightarrow f'(x) = \cos(x)$$

$$g(x) = x^2$$

$$g'(x) = 2x$$

$$f(x) = \sin(x)$$

$$= x^2 \cdot \sin(x) - \boxed{\int 2x \cdot \sin(x)\,dx}$$

$$g(x) = x \quad f'(x) = \sin(x) \leftarrow \int x \cdot \sin(x)\,dx$$

$$g'(x) = 1 \quad f(x) = -\cos(x) \qquad = -x \cdot \cos(x) + \int \cos(x)\,dx$$

$$= \boxed{-x \cdot \cos x + \sin(x) + C}$$

$$= x^2 \cdot \sin(x) - 2(-x \cdot \cos(x) + \sin(x)) + C$$

$$= x^2 \cdot \sin(x) + 2x\cos(x) - 2\sin(x) + C$$

בדיקה:

$$= \cancel{2x \cdot \sin(x)} + \boxed{x^2 \cdot \cos(x)} + \cancel{2 \cdot \cos(x)} - \cancel{2x \cdot \sin(x)} - \cancel{2\cos(x)}$$

תרגיל 4:

$$\int \sin(x)\cdot\cos(x)\,dx \longrightarrow f'=\sin(x) \quad g=\cos(x)$$

$$= -(\cos(x))^2 - \underbrace{\int \cos(x)\cdot\sin(x)\,dx}_{\text{לוקחים את זה ומעבירים לצד השני:}} \qquad f=-\cos(x) \quad g=-\sin(x)$$

$$2\cdot\int \sin(x)\cdot\cos(x)\,dx = -\cos^2(x)$$

$$\int \sin(x)\cdot\cos(x)\,dx = \boxed{\frac{\cos^2(x)}{2}+C}$$

עכשיו נעשה את הבחירה ההפוכה:

$$\int \sin(x)\cdot\cos(x)\,dx \longrightarrow f'=\cos(x) \quad g=\sin(x)$$

$$= \sin^2(x) - \underbrace{\int \sin(x)\cdot\cos(x)\,dx}_{\text{לוקחים את זה לצד השני:}} \qquad f=\sin(x) \quad g=\cos(x)$$

$$2\cdot\int \sin(x)\cdot\cos(x)\,dx = \sin^2(x)$$

$$\int \sin(x)\cdot\cos(x)\,dx = \boxed{\frac{\sin^2(x)}{2}+C}$$

קבוע!

$$\frac{\sin^2(x)}{2} - \frac{\cos^2(x)}{2} = \frac{1}{2}$$

אבל זה בסדר.

שיטת ההצבה:

דרך I:

$$\int \sqrt{x^2+1}\cdot(2x)\,dx \longrightarrow$$

$g(x)=x^2+1$

$g'(x)=2x$

$f'(y)=\sqrt{y}=y^{0.5}$

$$\int \sqrt{g(x)}\cdot g'(x)\,dx$$

$$\int (g(x))^{0.5}\cdot g'(x)\,dx = \frac{g(x)^{1.5}}{1.5}+C$$

$$= \frac{(x^2+1)^{1.5}}{1.5}+C$$

דרך II:

$$t=g(x)$$

$$\frac{dt}{dx}=g'(x) \Rightarrow dt=g'(x)\,dx$$

או:

$$d(g(x)) = g'(x)\,dx$$

$$\int \sqrt{x^2+1} \cdot (2x)\, dx \qquad t=x^2+1 \Rightarrow dt=2x\,dx$$

$$dx=\frac{dt}{2x}$$

$$\int \sqrt{t} \cdot \cancel{2x} \cdot \frac{dt}{\cancel{2x}} =$$

$$= \int t^{0.5}\, dt =$$

$$= \frac{t^{1.5}}{1.5} + C = \frac{(x^2+1)^{1.5}}{1.5} + C$$

תרגיל 5:

$$\int \sin(x) \cdot \cos(x)\, dx$$

$$g'(x)=\cos(x) \longrightarrow g(x)=\sin(x)$$

$$dt=\cos(x)\,dx \longleftarrow t=\sin(x)$$

$$dx=\frac{dt}{\cos(x)} \Longleftarrow$$

$$\int t \cdot \cos(x) \cdot \frac{dt}{\cos(x)} = \int t\, dt$$

$$= \frac{t^2}{2} + C = \frac{\sin^2 x}{2} + C$$

תרגיל 6:

$$\int (e^x)^2\, dx = \int e^{2x}\, dx$$

$dt=2\,dx$ נסמן $t=2x$ אז

$$dx=\frac{1}{2}dt \longleftarrow$$

$$\int e^{2x}\, dx = \int e^t \cdot \frac{1}{2} dt$$

$$= \frac{1}{2}\int e^t \cdot dt = \frac{1}{2} e^t + C$$

$$= \frac{1}{2} e^{2x} + C$$

תרגיל 7:

$$\int \sin(x) \cdot \cos(x)\, dx = \int \frac{\sin(2x)}{2}\, dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int \sin(2x)\, dx$$

$dx=\frac{1}{2}dt \longleftarrow dt=2dx$ נסמן $t=2x$ אז

$$\frac{1}{2}\int \sin(2x)\,dx = \frac{1}{2}\int \sin(t)\cdot\frac{1}{2}\cdot dt =$$

$$= \frac{1}{4}\int \sin(t)\,dt = \frac{1}{4}(-\cos(t)) + C =$$

$$= -\frac{\cos(2x)}{4} + C = -\frac{2\cos^2(x) - 1}{4} + C =$$

$$= -\frac{\cos^2(x)}{2} + \frac{1}{4} + C \leftarrow$$ קבוע!

מקרה פרטי של (4) (הצבה לינארית):

אם $\int f(x)\,dx = F(x) + C$ אז:

$$\int f(ax+b)\,dx = \frac{F(ax+b)}{a} + C$$

בדיקה – הוכחה:
(גזירה): $f(ax+b) = \frac{F'(ax+b)\cancel{a}}{\cancel{a}}$. מהנתון $F'(x) = f(x)$

לכן אם השוויון $f(ax+b) = F'(ax+b)$ מתקיים.

<u>דוגמאות להצבה לינארית:</u>

1.
$$\int \sqrt{2x+1}\,dx =$$
$$= \int (2x+1)^{0.5}\,dx =$$
$$= \frac{(2x+1)^{1.5}}{1.5\cdot 2} + C$$

2.
$$\int \cos(x)\,dx = \sin(x) + C$$
$$\int \cos(ax+b)\,dx = \frac{\sin(ax+b)}{a} + C$$

3.
$$\int \frac{1}{x}\,dx = \ln(x) + C$$
$$\int \frac{1}{ax+b}\,dx = \frac{\ln(|ax+b|)}{a} + C$$

4

$$\int \frac{1}{x^2+4}\,dx = \int \frac{1}{4\left(\frac{x^2}{4}+1\right)}\,dx =$$

$$= \int \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{\left(\frac{x}{2}\right)^2+1}\,dx = \frac{1}{4}\int \frac{1}{\left(\frac{x}{2}\right)^2+1}\,dx =$$

$$= \frac{1}{4}\cdot\frac{\arctan\left(\frac{x}{2}\right)}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\arctan\left(\frac{x}{2}\right)+C$$

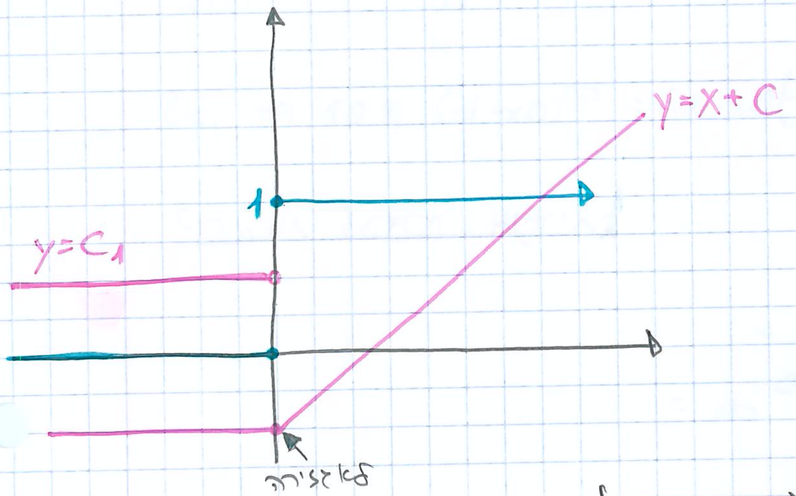
נוסחה כללית:

$$\boxed{\int \frac{1}{x^2+p^2}\,dx = \frac{1}{p}\arctan\left(\frac{x}{p}\right)+C}$$

בדיקה:

$$\frac{1}{p}\cdot\frac{1}{1+\left(\frac{x}{p}\right)^2}\cdot\frac{1}{p} = \frac{1}{p^2+x^2}$$

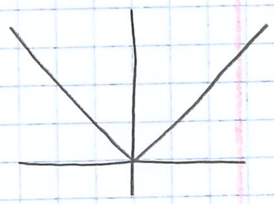
דוגמא של פונקציה $f(x)$ שאין לה פונקציה קדומה, צ"ל $\int f(x)dx$ לא קיים:



לכל פונקציה רציפה יש פונקציה קדומה!

למשל:

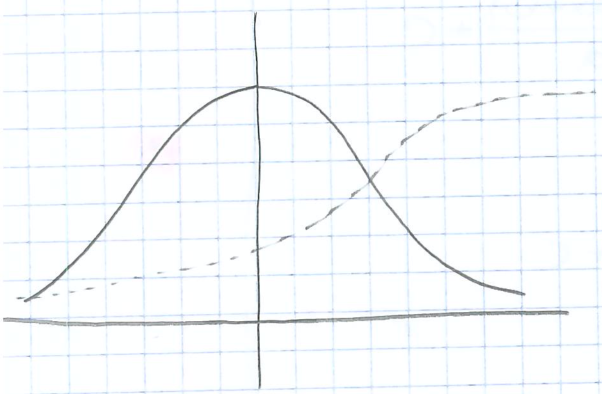
רציפה: $f(x)=|x|$



$$\int |x|\,dx = \frac{x\cdot|x|}{2}+C$$

$$f(x)=e^{\frac{-x^2}{2}}$$

$$\phi(x)+C = \int e^{\frac{-x^2}{2}}\,dx$$



$$\int \frac{\sin(x)}{x}\,dx$$

אינפי - שיעור 2:

אינטגרציה בחלקים:

תמיד אם יש $\cos(x)$ או $\sin(x)$ אז בוחרים אותם כ- $f'(x)$:

דוגמא:

$$\int x \cdot \cos(x)\, dx$$

$$f'(x) = \cos(x) \longrightarrow f(x) = \sin(x)$$

$$g(x) = x \longrightarrow g'(x) = 1$$

$$= x \cdot \sin(x) - \int \sin(x)\, dx$$

$$= x \cdot \sin(x) + \cos(x) + C.$$

אם אחד מהגורמים הוא נגזרת של אחת הפונקציות:

$$\int f(g(x)) \cdot g'(x)\, dx = f(g(x)) + C$$

דוגמא:

$$\int \frac{x}{x^2+1}\, dx = \int \frac{1}{x^2+1} \cdot x\, dx =$$

$$t = x^2 + 1;\quad dt = 2x \cdot dx \Rightarrow dx = \frac{dt}{2x}$$

$$I = \int \frac{1}{t} \cdot \cancel{x} \cdot \frac{dt}{2x} = \frac{1}{2}\int \frac{1}{t}\, dt = \frac{1}{2} \ln|t| + C =$$

$$= \frac{1}{2} \ln(x^2+1) + C$$

$$\int \frac{g'(x)}{g(x)}\, dx = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + C$$

$$t = g(x),\quad dt = g'(x)\, dx$$

$$= \ln|g(x)| + C$$

נוסחה כללית:

$$\boxed{\int \frac{g'(x)}{g(x)}\, dx = \ln|g(x)| + C}$$

אינטגרציה של פונקציות רציונאליות:

פונקציה רציונאלית ← $\left\{ \dfrac{P(x)}{Q(x)} \right.$ → פולינום

לא! רציונאלית. ← $\left\{ \dfrac{\sqrt{x}}{x+1} \right.$

למשל:

$$\frac{x^4+x^2+1}{x^3+1}$$

דוגמא 1:

$$I=\int \frac{x^4+x^2-1}{x^2-1}\,dx$$

$\deg(Q) \le \deg(P)$
(מעלה)

משפט חילוק עם שארית:

$$P(x)=Q(x)\cdot S(x)+R(x)$$

כאשר $\deg(R) < \deg(Q)$

$S(x)$ → x^2+2 ← מנה חלקית

המחולק $\quad x^4+x^2-1 \;\big|\; x^2-1 \quad$ המחלק

$$\begin{array}{r} x^4+x^2-1 \\ -\;\underline{x^4-x^2} \\ 2x^2-1 \\ -\;\underline{2x^2-2} \\ 1 \end{array}$$

1 ← שארית

$R(x)$

$$x^4+x^2-1=(x^2-1)(x^2+2)+1$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{x^4+x^2-1}{x^2-1}=x^2+2+\frac{1}{x^2-1}$$

$$I=\int x^2\cdot dx+\int 2\,dx+\int \frac{1}{x^2-1}\,dx$$

$$x^2-1=(x-1)(x+1)$$

$$\frac{1}{(x-1)(x+1)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1}\right)$$

$$\int \frac{1}{x^2-1}\,dx = \frac{1}{2}\left(\int \frac{1}{x-1}\,dx - \int \frac{1}{x+1}\,dx\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\ln|x-1| - \ln|x+1|\right) + C$$

$\frac{P(x)}{Q(x)}$:ו- $\deg(P) < \deg(Q)$

שבר פשוט:

1. $\frac{A}{(ax+b)^k}$ לדוגמא: $\frac{2}{(3x-5)^{10}}$

2. $\frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^k}$ לדוגמא: $\frac{2x+1}{(2x^2+1)^{10}}$

$\Uparrow$ לא פריק $\Delta<0$ שורש.

איך לפרק שבר: $\frac{P(x)}{Q(x)}$ לסכום של שברים

דוגמא:

$$\int \frac{4x^3-2x^2-4x+6}{x^4-1}\,dx$$

לפרק את המכנה:

$$x^4-1 = (x^2-1)(x^2+1)$$

$$\Downarrow$$

$x^4-1 = (x-1)(x+1)(x^2+1)$ מכנה משותף

$$\frac{4x^3-2x^2-4x+6}{x^4-1} = \frac{A}{x-1}\Big/(x+1)(x^2+1) + \frac{B}{x+1}\Big/(x-1)(x^2+1) + \frac{Cx+D}{x^2+1}\Big/(x+1)(x-1)$$

צ"ל: A, B, C, D

מ"מ: $(x-1)(x+1)(x^2+1)$

$\times$ לכל x ממשי. $4x^3-2x^2-4x+6 = A(x+1)(x^2+1) + B(x-1)(x^2+1) + (Cx+D)(x^2-1)$

$x=1 \Rightarrow 4=4A \Rightarrow A=1$

* צריך לבחור מספר שמאפסים חלקים שונים של המשוואה.

$x=-1 \Rightarrow 4=-4B \Rightarrow B=-1$

$x=0 \Rightarrow 6 = A-B-D \Rightarrow D=-4$

השווה מקדמים של x^3:

$4 = A+B+C$

$\Rightarrow 4 = C$

$$\frac{4x^3-2x^2-4x+6}{x^2+1} = \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1} + \frac{4x-4}{x^2-1}$$

$$I = \int \frac{1}{x-1}\,dx - \int \frac{1}{x+1}\,dx + \int \frac{4x-4}{x^2+1}\,dx$$

$$4\int \frac{x-1}{x^2+1}\,dx = 4\int \frac{x}{x^2+1}\,dx - 4\int \frac{1}{x^2+1}\,dx$$

$t = x^2+1$

$dt = 2x\,dx \Rightarrow dx = \frac{dt}{2x}$

$$= 2\int \frac{(x^2+1)'}{x^2+1}\,dx - 4\int \frac{1}{x^2+1}\,dx$$

$$= 2\cdot \ln(x^2+1) - 4\arctan(x)$$

$$I = 2\cdot \ln(x^2+1) - 4\arctan(x) + \ln|x-1| - \ln|x+1| + C$$

מקרה שלישי (פולינום ריבועי) $\int \frac{Ax+B}{x^2+px+q}\,dx$

כאשר x^2+px+q אי-פריק $(\Delta = p^2-4q < 0)$

השלם הנדרש:

$$\int \frac{-x+2}{x^2-x+1}\,dx$$

$$\Delta=(-1)^2-4\cdot1\cdot1<0$$

$$\int \frac{-\frac{1}{2}(2x-1)+\frac{3}{2}}{x^2-x+1}\,dx=\int \frac{-\frac{1}{2}(2x+1}{x^2-x+1}\,dx+\frac{3}{2}\int\frac{1}{x^2-x+1}\,dx=$$

$$=\frac{1}{2}\ln|x^2-x+1|+\frac{3}{2}\int\frac{1}{x^2-x+1}\,dx$$

$$\int\frac{1}{x^2-x+1}\,dx$$

השלמה לריבוע:

$$(a\pm b)^2=a^2\pm2ab+b^2$$

$$x^2-x+1=x^2-2x\tfrac{1}{2}+1=x^2-2x\tfrac{1}{2}+\left(\tfrac{1}{2}\right)^2-\left(\tfrac{1}{2}\right)^2+1$$

$$=\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}$$

$$\frac{3}{2}\int\frac{1}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}\,dx=$$

$t=x-\frac{1}{2}$, $dt=1\cdot dx$

$dx=dt$

$$=\frac{3}{2}\int\frac{1}{t^2+\frac{3}{4}}\,dt=\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\cdot\arctan\left(\frac{t}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\right)=$$

$$=\sqrt{3}\arctan\left(\frac{x-\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\right)=\sqrt{3}\cdot\arctan\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right)+C$$

התשובה הסופית:

$$I=-\frac{1}{2}\ln(x^2-x+1)+\sqrt{3}\cdot\arctan\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right)+C$$

השלמה לריבוע:

$$\int \frac{Ax+B}{\underbrace{x^2+px+q}_{\text{לא פריק}}}\,dx$$

דוגמא:

$$I=\int \frac{3x+1}{4x^2+4x+5}\,dx \qquad \Delta=4^2-4\cdot4\cdot5<0$$

$$(4x^2+4x+5)'=8x+4$$

$$3x+1=?\cdot(8x+4)+?$$
$$=\frac{3}{8}(8x+4)-\frac{1}{2}$$

$$I=\int \frac{\frac{3}{8}(8x+4)-\frac{1}{2}}{4x^2+4x+5}\,dx=\frac{3}{8}\int\frac{(4x^2+4x+5)'}{4x^2+4x+5}\,dx-\frac{1}{2}\int\frac{1}{4x^2+4x+5}\,dx$$

$$=\frac{3}{8}\ln(4x^2+4x+5)$$

$$4x^2+4x+5=(2x)^2+2\cdot(2x)\cdot1+1^2+4\,; \qquad \int\frac{1}{4x^2+4x+5}\,dx$$
$$=(2x+1)^2+4$$

$$\int\frac{1}{4x^2+4x+5}\,dx \qquad t=2x+1\Rightarrow dt=2\cdot dx\Rightarrow dx=\frac{1}{2}dt$$

$$\int\frac{1}{t^2+4}\cdot\frac{1}{2}\,dt=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\arctan\left(\frac{t}{2}\right)+C$$

$$=\frac{1}{4}\arctan\left(\frac{2x+1}{2}\right)$$

התשובה הסופית:

$$\frac{3}{8}\ln(4x^2+4x+5)-\frac{1}{8}\cdot\arctan\left(\frac{2x+1}{2}\right)+C$$

פירוק לשברים פשוטים כאשר יש ריבועי בגורם המכנה:

דוגמא:

$$\int \frac{x}{(x^2-1)(x+1)}\,dx$$

$$(x^2-1)(x+1) = (x-1)(x+1)^2$$

$$\frac{x}{(x-1)(x+1)^2} = \frac{A}{x-1}\Big/(x+1)^2 + \frac{B}{x+1}\Big/(x-1)(x+1) + \frac{C}{(x+1)^2}\Big/(x-1)$$

מ"מ: $(x-1)(x+1)^2$
מכנה משותף

$$x = A\cdot(x+1)^2 + B(x^2-1) + C(x-1)$$

$$x=-1 \Rightarrow -1=-2C \Rightarrow C=\tfrac{1}{2}$$

$$x=1 \Rightarrow 1=4A \Rightarrow A=\tfrac{1}{4}$$

$$x=0 \Rightarrow 0=A-B-C \Rightarrow B=-\tfrac{1}{4}$$

$$\int \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{x-1}\,dx - \int\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{x+1}\,dx + \frac{1}{2}\int\frac{1}{(x+1)^2}\,dx$$

$$= \frac{1}{4}\ln|x-1| - \frac{1}{4}\ln|x+1| - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x+1} + C$$

$$\boxed{\int (x+1)^{-2}\,dx = \frac{(x+1)^{-1}}{-1}}$$

נוסחה כללית:

$$Q(x) = (a_1x+b_1)^{m_1}\cdot\ldots\cdot(a_kx+b_k)^{m_k}$$

$$(x^2+px+q)^{n_1}\cdot\ldots\cdot(x^2+px+q)^{n_l}$$

אי-פריקים.

$$(x+b_1)^{m_1} = \frac{B_1}{x+b_1} + \frac{B_2}{(x+b_1)^2} + \ldots + \frac{B_{m_1}}{(x+b_1)^{m_1}}$$

$$(x^2+px+q)^{n_1} \Rightarrow \frac{B_1x+C_1}{x^2+p_1x+q_1} + \frac{B_2x+C_2}{x^2+p_2x+q_2} + \ldots\ldots$$

חישוב של $\int \frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^n}\,dx$

$$\int \frac{1}{(x^2+1)^2}\,dx =$$

בחלקים:

$f'=1 \rightarrow f=x$

$g(x)=(x^2+1)^{-2}$

$g'(x)=(-2)(x^2+1)^{-3}\cdot 2x$

$$I = x\cdot(x^2+1)^{-2}+4\int \frac{x^2}{(x^2+1)^3}\,dx$$

$$= x\cdot(x^2+1)^{-2}+4\int \frac{x^2+1-1}{(x^2+1)^3}\,dx$$

$$= x\cdot(x^2+1)^{-2}+4\int \frac{1}{(x^2+1)^2}\,dx-4\int \frac{1}{(x^2+1)^3}\,dx$$

$$I = x\cdot(x^2+1)^{-2}+4I-4\int \frac{1}{(x^2+1)^3}\,dx$$

כדי לחשב $\int \frac{1}{(x^2+1)^2}\,dx$ נתחיל ב- $\int \frac{1}{x^2+1}\,dx$

$f'=1 \rightarrow f=x$

$g=(x^2+1) \rightarrow g'=(-1)\cdot(x^2+1)^{-2}\cdot 2x$

$$\arctan(x)+C=\int \frac{1}{x^2+1}\,dx=\int 1\cdot\frac{1}{x^2+1}\,dx$$

$$= x\cdot(x^2+1)^{-1}+2\int \frac{x^2}{(x^2+1)^2}\,dx = x(x^2+1)^{-1}+2\int \frac{x^2+1-1}{(x^2+1)^2}\,dx$$

$$= x\cdot(x^2+1)+2\int \frac{1}{x^2+1}\,dx-2\int \frac{1}{(x^2+1)^2}\,dx$$

$$\arctan(x)+C = x\cdot(x+1)^{-1}+2\arctan(x)-2\int \frac{1}{(x^2+1)^2}\,dx$$

$$\int \frac{1}{(x^2+1)^2}\,dx = \frac{1}{2}\left(\frac{x}{x^2+1}+\arctan(x)+C\right)$$

אינפי - שיעור 3:

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)}\,dx$$

1. אם $\deg(P) \geq \deg(Q)$ אז מחלקים את P ב-Q עם שארית.

2. $\deg(P) < \deg(Q)$

צריך לפשט $\frac{P}{Q}$ כסכום של שברים פשוטים.

דוגמא:

$$\frac{x^3+5x^2-4x+4}{\underbrace{(x+1)^4}\cdot\underbrace{(x-1)^3}\cdot\underbrace{(x^2+x+1)^2}} =$$

$$= \frac{A_1}{x+1} + \frac{A_2}{(x+1)^2} + \frac{A_3}{(x+1)^3} + \frac{A_4}{(x+1)^4} + \frac{B_1}{x-1} + \frac{B_2}{(x-1)^2} + \frac{B_3}{(x-1)^3} +$$

$$+ \frac{C_1}{x^2+x+1} + \frac{C_2}{(x^2+x+1)^2}$$

ואז עושים מכנה משותף לכולם.

דוגמא:

$$\frac{x^3+5x^2-4x+4}{\underbrace{(x-1)^2}\cdot\underbrace{(x^2+x+1)}} =$$

$$= \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{Cx+D}{x^2+x+1}$$

בשביל מכנה משותף:

נכפיל ב: $(x-1)(x^2+x+1)$ | נכפיל ב: x^2+x+1 | נכפיל ב: $(x-1)^2$

נקבל:

$$x^3+5x^2-4x+4 = A\cdot(x-1)(x^2+x+1) + B(x^2+x+1) + (Cx+D)(x-1)^2$$

$x=1$:

$$6 = 3B \Longrightarrow B=2$$

$x=0$:

$$4 = -A+B+D$$

$$-A+D = 2$$

$x = -1$:

$$12 = -2A + B + (-C + D) \cdot 4$$

$$5 = -A + (-C + D) \cdot 2$$

x^3

$$1 = A + C$$

נכתוב את כל המשוואות שמצאנו:

$$\begin{cases} A + C = 1 \\ -A + D = 2 \\ -A - 2C + 2D = 5 \end{cases}$$

$$A = 1, \quad C = 0, \quad D = 3$$

נציב בשברים:

$$\frac{1}{x-1} + \frac{2}{(x-1)^2} + \frac{3}{x^2+x+1}$$

נחשב עכשיו את האינטגרל:

$$I = \int \frac{x^3 + 5x^2 - 4x + 4}{(x-1)^2 (x^2+x+1)} dx =$$

$$= \int \frac{1}{x-1} dx + \int \frac{2}{(x-1)^2} dx + \int \frac{3}{x^2+x+1} dx$$

$$= \ln|x-1| + 2 \cdot \frac{(x-1)^{-1}}{-1} + \ldots$$

נחשב את החלק האחרון:

$$\int \frac{1}{x^2+x+1}$$

$$x^2 + x + 1 = \underbrace{x^2 + 2 \cdot x \tfrac{1}{2} + \left(\tfrac{1}{2}\right)^2} - \left(\tfrac{1}{2}\right)^2 + 1$$

$$= \left(x + \tfrac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}$$

$$\int \frac{1}{(x+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}\,dx = \int \frac{1}{t^2+\frac{3}{4}}\,dt$$

$$t = x+\tfrac{1}{2} \longrightarrow dt = 1\,dx =$$

$$\boxed{\int \frac{1}{x^2+p^2}\,dx = \frac{1}{p}\arctan\left(\frac{x}{p}\right)+C}$$

$p=\sqrt{\frac{3}{4}}$
$$= \frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}} \cdot \arctan\left(\frac{t}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\right)+C$$

$$= \frac{2}{\sqrt{3}} \arctan\left(\frac{x+\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\right)+C$$

$$= \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \arctan\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)+C$$

$$= 3 \cdot \frac{2}{3} \cdot \arctan\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)+C$$

$$\boxed{\int \frac{U'(x)}{U(x)}\,dx = \ln|U(x)|+C}$$

אינטגרלים של פונקצ׳ טריגונומטריות:

$$\int \cos(x)\,dx = \sin(x)+C$$

$$\int \sin(x)\,dx = -\cos(x)+C$$

$$\int \tan(x)\,dx = \int \frac{\sin(x)}{\cos(x)}\,dx = -\int \frac{(\cos(x))'}{\cos(x)}\,dx = -\ln|\cos(x)|+C$$

$$\int \cot(x)\,dx = \int \frac{\cos(x)}{\sin(x)}\,dx = \ln|\sin(x)|+C$$

חישוב אינטגרלים מצורה $\int R(\cos(x),\sin(x))dx$ כאשר $R(u,v)$ הינו
ביטוי פולינומיאלי.

$$\int \sin(x)\cdot\cos(x)\,dx$$

נוסחאות עזר לשימוש אינטגרלים:

$$\cos(x)\cdot\sin(y)=\frac{\cos(x+y)+\cos(x-y)}{2}$$

$$\sin(x)\cdot\sin(y)=\frac{\cos(x-y)-\cos(x+y)}{2}$$

$$\sin(x)\cdot\cos(y)=\frac{\sin(x+y)+\sin(x-y)}{2}$$

$$\sin(x)\cdot\cos(x)=\frac{\sin(2x)}{2}$$

נזכור לקודש:

.1

$$\int \sin(x)\cdot\cos(x)\,dx=$$

$$=\frac{1}{2}\int \sin(2x)\,dx=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{-\cos(2x)}{2}+C$$

$$=-\frac{\cos(2x)}{4}+C$$

.2

$$\int \sin^2(x)\cdot\cos^3(x)\,dx$$

$$\sin(x)\cdot\cos(x)=\frac{1}{2}\sin(2x)$$

$$\left(\frac{1}{2}\cdot\sin(2x)\right)^2\cdot\cos(x)=$$

$$=\frac{1}{4}\left(\frac{1-\cos(4x)}{2}\right)\cdot\cos(x)$$

$$=\frac{1}{8}\cos(x)-\frac{1}{8}\cdot\cos(4x)\cdot\cos(x)$$

$$=\frac{1}{8}\cos(x)-\frac{1}{8}\left(\frac{\cos(5x)+\cos(3x)}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{8}\cos(x) - \frac{1}{16}\cos(5x) - \frac{1}{16}\cos(3x)$$

לכן:

$$\int \sin^2(x)\cdot\cos^3(x)\,dx = \frac{1}{8}\int \cos(x)\,dx - \frac{1}{16}\int \cos(5x)\,dx - \frac{1}{16}\int \cos(3x)\,dx$$

$$= \frac{1}{8}\sin(x) - \frac{1}{16}\cdot\frac{\sin(5x)}{5} - \frac{1}{16}\cdot\frac{\sin(3x)}{3} + C$$

$\cos^2 + \sin^2 = 1$

$\cos^2(x) = 1 - \sin^2(x)$

דרך נוספת לפתור את התרגיל:

$$\int \sin^2(x)\cdot\cos^3(x)\,dx$$

$$t = \sin(x) \Rightarrow dt = \cos(x)\,dx \Rightarrow dx = \frac{dt}{\cos(x)}$$

$$= \int t^2\cdot\cos^3(x)\,\frac{dt}{\cos(x)} =$$

$$= \int t^2\cdot\cos^2(x)\,dt =$$

$$= \int t^2(1-t^2)\,dt =$$

$$= \int (t^2 - t^4)\,dt = \frac{t^3}{3} - \frac{t^5}{5} + C =$$

$$= \frac{\sin^3(x)}{3} - \frac{\sin^5(x)}{5} + C$$

חישוב אינטגרלים מסוג $\int \frac{P(\sin(x),\cos(x))}{Q(\sin(x),\cos(x))}$ כאשר P,Q הם ביטויים פולינומיאליים:

דוגמאות:

$$\int \frac{\sin(x)+\cos(x)}{\tan(x)}\,dx\ ;\ \int \frac{1+\sin(x)}{1-\sin(x)}\,dx\ ;\ \int \frac{1}{\sin(x)}\,dx$$

הצבה אוניברסלית:

t אוניברסלי: $\longrightarrow \boxed{t=\tan\left(\frac{x}{2}\right)}$

$$\Downarrow$$

$$\arctan(t)=\frac{x}{2}$$

$$\Leftarrow \quad x=2\cdot\arctan(t)$$

$$dx=2\cdot\frac{1}{1+t^2}\,dt$$

ביטויים:

$$\sin(x)=\sin\left(2\tfrac{x}{2}\right)=\frac{2\cdot\cos\left(\frac{x}{2}\right)\cdot\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{1}$$

$$=2\cdot\frac{\cos\left(\frac{x}{2}\right)\cdot\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)+\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}=2\cdot\frac{\tan\left(\frac{x}{2}\right)}{1+\left(\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right)^2}=$$

נחלק ב: $\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)$

$$\sin(x)=\frac{2t}{1+t^2}$$

$$\boxed{\cos(2x)=\cos^2(x)-\sin^2(x)}$$

מנוסחה זו, נובע:

$$\cos(x)=\frac{\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)-\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}{1}=$$

$$=\frac{\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)-\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}{\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)+\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}=\frac{1-\tan^2\left(\frac{x}{2}\right)}{1+\tan^2\left(\frac{x}{2}\right)}=\frac{1-t^2}{1+t^2}$$

נחלק ב: $\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)$

סיכום:

$$t = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$$

$$x = 2 \cdot \arctan(t)$$

$$dx = \frac{2}{1+t^2}\, dt$$

$$\sin(x) = \frac{2t}{1+t^2}$$

$$\cos(x) = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

דוגמאות:

1

$$\int \frac{1}{\sin(x)}\, dx$$

(הצבה טריגו')

$$\int \frac{1}{\frac{\cancel{2}t}{\cancel{1+t^2}}} \cdot \frac{\cancel{2}}{\cancel{1+t}}\, dt =$$

$$= \int \frac{1}{t}\, dt = \ln|t| + c$$

$$= \ln\left|\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right| + c$$

2

$$\int \frac{1}{1-\sin(x)}\, dx$$

(הצבה טריגו')

$$= \int \frac{1}{1+\frac{2t}{1+t^2}} \cdot \frac{2}{1+t^2}\, dt =$$

$$= \int \frac{2}{1+t^2-2t}\, dt = 2\int \frac{1}{(t-1)^2}\, dt =$$

$$= 2 \cdot \frac{(t-1)^{-1}}{-1} + c$$

$$= \frac{-2}{\tan(\frac{x}{2})-1} + C$$

3

$$\int \frac{1}{3+\sin(x)+\cos(x)}$$

(הצבה טריגו')

$$= \int \frac{1}{3+\frac{2t}{1+t^2}+\frac{1-t^2}{1+t^2}} \cdot \frac{2}{1+t^2}\, dt$$

$$= 2\int \frac{1}{3(1+t^2)+2t+(1-t^2)}\, dt = 2\cdot\int \frac{1}{2t^2+2t+4}\, dt =$$

$$= \int \frac{1}{t^2+t+2}\, dt \leftarrow$$

הריבועי t^2+t+2

לא פריק! $\Delta<0$

השלמה לריבוע:

$$t^2+t+2 = t^2+2t\cdot\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^2-\left(\frac{1}{2}\right)^2+2 =$$

$$= \left(t+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{7}{4}$$

האינטגרל שמתקבל הוא:

$$\int \frac{1}{(t+\frac{1}{2})^2+\frac{7}{4}}\, dt = \frac{1}{\sqrt{\frac{7}{4}}}\cdot \arctan\left(\frac{t+\frac{1}{2}}{\sqrt{\frac{7}{4}}}\right)+C$$

$$= \frac{2}{\sqrt{7}}\cdot\arctan\left(\frac{(2t+1)}{\sqrt{7}}\right)+C = \frac{2}{\sqrt{7}}\cdot\arctan\left(\frac{2\tan(\frac{x}{2})+1}{\sqrt{7}}\right)+C$$

4

$$\int \frac{1}{\cos(x)}\, dx$$

דרך 1: (לפי הצבה אוניברסלית)

$$= \int \frac{\cos(x)}{\cos^2(x)}\, dx$$

$t=\sin(x)$

$dt = \cos(x)\, dx$

$dx = \frac{dt}{\dots}$

X.

$$= \int \frac{\cancel{\cos(x)}}{\cos^2(x)} \frac{dt}{\cancel{\cos(x)}}$$

$$= \int \frac{1}{1-\sin^2(x)}\, dt = \int \frac{1}{1-t^2}\, dt$$

$$\frac{1}{1-t^2} = \frac{1}{(1-t)(1+t)} = \frac{A}{1-t} + \frac{B}{1+t} =$$

$$= \frac{0.5}{1-t} + \frac{0.5}{1+t}$$

$$\int \frac{1}{1-t^2}\, dt = \frac{1}{2}\int \frac{1}{1-t}\, dt + \frac{1}{2}\int \frac{1}{t+1}\, dt =$$

$$= \frac{1}{2} \frac{\ln|1-t|}{-1} + \frac{1}{2}\ln|1+t| + C$$

$$= \frac{1}{2}\left(\ln|1+t| - \ln|1-t|\right) + C$$

$$= \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+t}{1-t}\right| + C = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+\sin(x)}{1-\sin(x)}\right| + C$$

דרך II : (הצבה אוניברסלית)

$$\int \frac{1}{\cos(x)}\, dx$$

(הצבה אוניברסלית)

$$\int \frac{1}{\frac{1-t^2}{\cancel{1+t^2}}} \cdot \frac{2}{\cancel{1+t^2}}\, dt = \int \frac{2}{1-t^2}\, dt = \int\left(\frac{1}{1-t} + \frac{1}{1+t}\right) dt$$

$$= \frac{\ln|1-t|}{-1} + \ln|1+t| + C = \ln\left|\frac{1+t}{1-t}\right| + C =$$

$$= \ln\left|\frac{1+\tan\left(\frac{x}{2}\right)}{1-\tan\left(\frac{x}{2}\right)}\right| + C$$

הצבה הפוכה:

$$\int \sqrt{4-4x-x^2}\, dx$$

$$dt = f'(x)\, dx \Leftarrow t = f(x)$$

הצבה הפוכה:

$$x = \varphi(t)$$

$$dx = \varphi'(t)\, dt$$

דוגמא:

$$I = \int \sqrt{1-x}\, dx \qquad x = \cos(t)$$

$$dx = -\sin t\, dt$$

$$I = \int \sin(t) \cdot (-\sin(t))\, dt = -\int \sin^2(t)\, dt$$

$$\sin^2(t) = \frac{1-\cos(2t)}{2}$$

$$I = \int \frac{1-\cos(2t)}{2}\, dt$$

$$= -\frac{1}{2}t + \frac{1}{2} \cdot \frac{\sin(2t)}{2} + C = -\frac{1}{2}\arccos(x) + \frac{1}{4}\sin(2\arccos(x)) + C$$

שאלה 2:

$$\int \frac{\sqrt{x+1}}{x}\,dx$$

$t=\sqrt{x+1}$

$dt = \frac{1}{2\sqrt{x+1}}\,dx$

$$I = \int \frac{t}{t^2-1}\,2t\,dt =$$

$2t\,dt = dx$

$$= 2\cdot\int \frac{t^2}{t^2-1}\,dt$$

$t^2 = x+1$

$x = t^2-1$

$$I = 2\int \frac{(t^2-1)+1}{t^2-1}\,dt =$$

$$= 2\cdot\int \left(1+\frac{1}{t^2+1}\right)dt = 2t + \int \frac{2}{t^2-1}\,dt$$

פירוק ל-

$$\frac{1}{t^2-1} = 0.5\left(\frac{1}{t-1}-\frac{1}{t+1}\right)$$

$$I = 2t + \int \left(\frac{1}{t-1}-\frac{1}{t+1}\right)dt$$

$$= 2t + \ln|t-1| - \ln|t+1| + C$$

$$= 2\sqrt{x+1} + \ln\left|\sqrt{x+1}-1\right| - \ln\left|\sqrt{x+1}+1\right| + C$$

אינפי - שיעור 4:

$$F'(x) = f(x)$$
ידוע

$$\int f(x)\,dx = F(x)$$

אם $f(x)$ רציפה אז $\int f(x)\,dx$ קיים.

$\int x \sin(x)\,dx$ קל!

$$\int \frac{\sin(x)}{x}\,dx$$

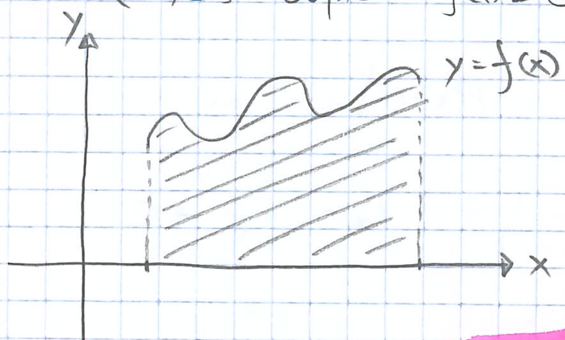
$$\int e^x\,dx = e^x + C$$

$\int e^{x^2}\,dx \leftarrow$ לא אלמנטרי אבל קיים.

שימושים של האינטגרלים:

חישוב שטחים ע"י אינטגרל:

נניח ש- $y=f(x)$ רציפה ו- $f(x) \geq 0$ בקטע $[a,b]$

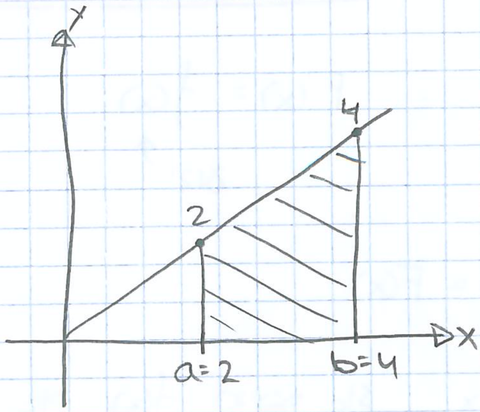


משפט ניוטון-לייבניץ:

תהי $f(x)$ רציפה ואי שלילית בקטע $[a,b]$. אז השטח בין גרף הפונקציה $y=f(x)$ וציר ה- x שווה ל- $F(b)-F(a)$ כאשר $F(x)$ היא פונקציה קדומה ל- $f(x)$.

$$F(x)+C = \int f(x)\,dx$$

דוגמא:



$y = x$

$f(x) = x$

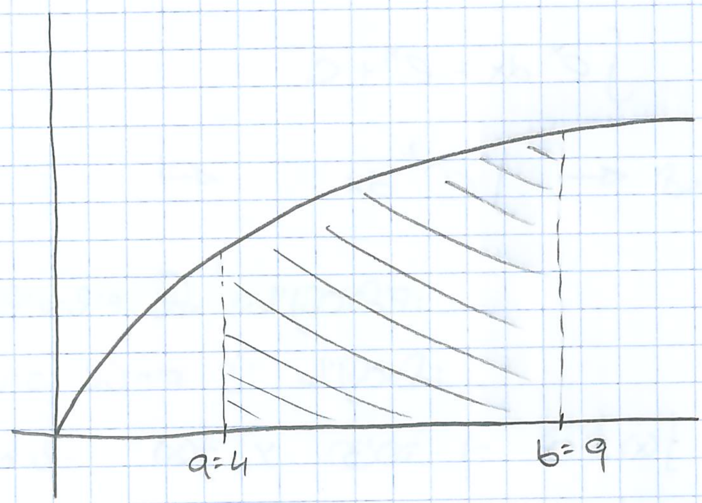
$S = \frac{(2+4)\cdot 2}{6} = 6$

$$\int x\,dx = \frac{x^2}{2} + C = F(x)$$

$$F(4) - F(2) = \left(\frac{4^2}{2} + C\right) - \left(\frac{2^2}{2} + C\right) = 6$$

דוגמא:

$y = \sqrt{x}$



$$F(x) = \int \sqrt{x}\,dx$$

$$= \int x^{0.5}\,dx = \frac{x^{1.5}}{1.5} + C$$

$$F(9) - F(4) = \left(\frac{9^{1.5}}{1.5} + C\right) - \left(\frac{4^{1.5}}{1.5} + C\right)$$

$$= 18 - \frac{16}{3} = \frac{38}{3}$$

[illegible] ← 9

$$\int_4^9 \sqrt{x}\,dx = S = F(b) - F(a)$$

[illegible] ← 4

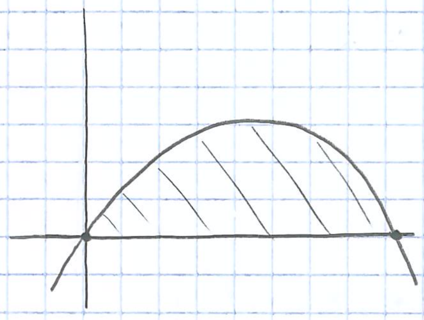
$$\int_4^9 \sqrt{x}\, dx = \frac{x^{1.5}}{1.5}\Big|_4^9 =$$

עליון
תחתון

$$= \frac{9^{1.5}}{1.5} - \frac{4^{1.5}}{1.5} = \frac{38}{3}$$

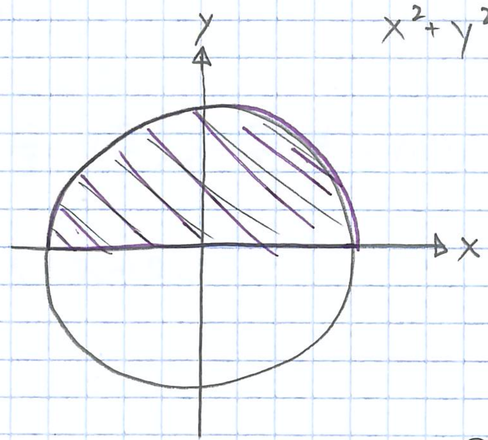
תרגיל:

$y = \sin(x)$ בקטע $0 \le x \le \pi$



$$S = \int_0^{\pi} \sin(x)\, dx = -\cos(x)\Big|_0^{\pi}$$

$$= -\cos(\pi) - (-\cos(0)) = -(-1) - (-1) = 2$$



$x^2 + y^2 = R^2$

πR^2

$y^2 = R^2 - x^2$

$y = \sqrt{R^2 - x^2}$

$a = -R \; , \; b = R$

$$S = \int_{-R}^{R} \sqrt{R^2 - x^2}\, dx$$

$R = 1$

$$S = \int_{-1}^{1} \sqrt{1 - x^2}\, dx$$

$x = \sin(t)$

$$\int \sqrt{1 - x^2}\, dx =$$

$x = \sin(t)$

$dx = \cos(t)\, dt$

$$\int \sqrt{1 - \sin^2(t)} \cdot \cos(t)\, dt$$

$$= \int \cos(t) \cdot \cos(t)\, dt = \int \cos^2(t)\, dt =$$

$$= \int \frac{1+\cos(2t)}{2}\, dt = \int \frac{1}{2}\, dt + \frac{1}{2} \int \cos(2t)\, dt$$

$$= \frac{t}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\overbrace{\sin(2t)}^{=(2\sin(t)\cdot\cos(t))}}{2} + C =$$

$$= \frac{1}{2}\arcsin(x) + \frac{1}{2} \cdot \underbrace{\sin(t)}_{= x} \cdot \underbrace{\cos(t)}_{= \sqrt{1-x^2}} + C =$$

$$= \frac{1}{2}\arcsin(x) + \frac{1}{2}x \cdot \sqrt{1-x^2} + C$$

$$S = \int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}\, dx = \left(\frac{1}{2}\arcsin(x) + \frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2}\right)\Big|_{-1}^{1} =$$

$$= \frac{1}{2}\arcsin(1) - \frac{1}{2}\arcsin(-1) = \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}$$

פרק 2 לחישוב:

$$S = \int_{-R}^{R} \sqrt{R^2-x^2}\, dx$$

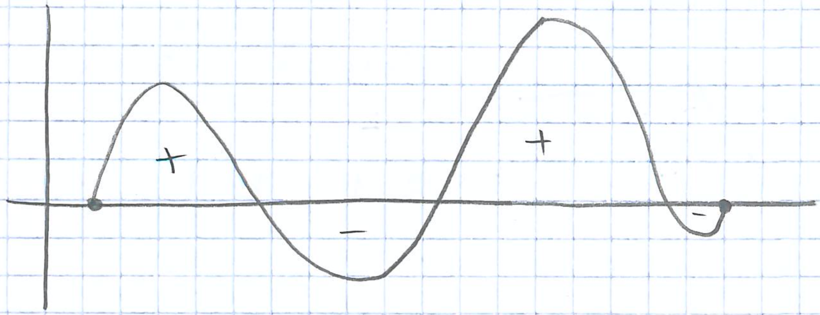
$$S = \int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}\, dx \underset{x=\sin(t)}{=} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\sin^2(t)} \cdot \cos(t)\, dt$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} |\cos(t)| \cdot \cos(t)\, dt = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(t)\, dt =$$

$$= \left(\frac{t}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\sin(2t)}{2}\right)\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \left(\frac{\pi}{4} + 0\right) - \left(-\frac{\pi}{4} + 0\right) = \frac{\pi}{2}$$

$$\boxed{\int_a^b f(x)\, dx = F(b) - F(a)} \leftarrow$$ האינטגרל המסויים!

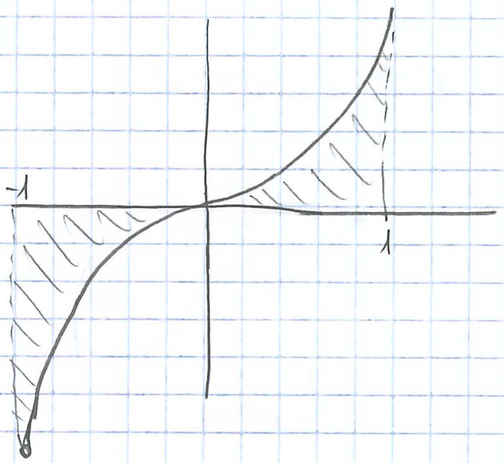
מה קורה כאשר $f(x)$ לא חיובית?



צ"ל שטח הגרף המוגבל ע"י:

$y=x^3$, ציר ה-x ו- $x=-1,\ x=1$

$$\int_{-1}^{1} x^3\,dx = \frac{x^4}{4}\Big|_{-1}^{1} = 0$$

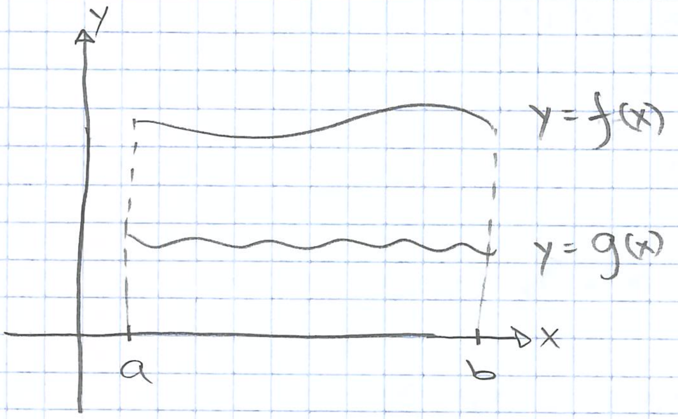


$$S_1 = \int_0^1 x^3\,dx = \frac{x^4}{4}\Big|_0^1 = \frac{1}{4}$$

$$S_2 = -\int_{-1}^{0} x^3\,dx = -\frac{x^4}{4}\Big|_{-1}^{0} = -\left(0-\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{4}$$

$$S = S_1 + S_2 = \frac{1}{2}$$

שטח המוגבל ע"י שני גרפים:

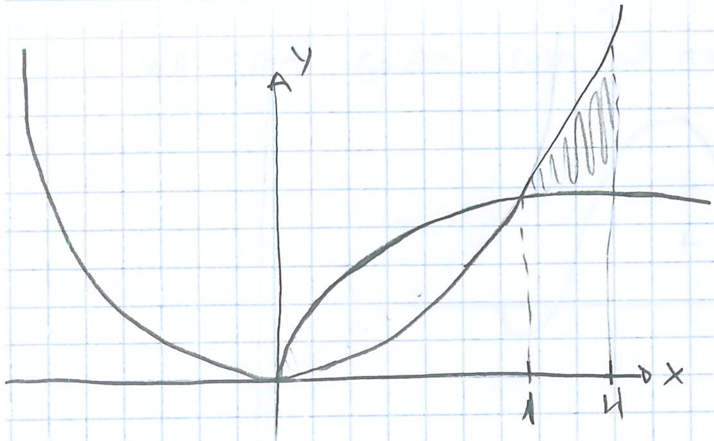


$$\int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b g(x)\,dx = \int_a^b (f(x)-g(x))\,dx$$

אם

$f(x) \geq g(x)$

ג3: שטח המוגבל ע"י:

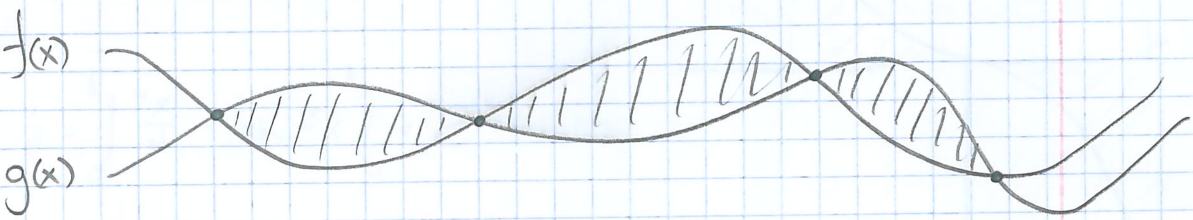


$g(x)=\sqrt{x}\ ,\ f(x)=x^2$

$a=1\ ,\ b=4$

$$\int_1^4 x^2-\sqrt{x}\ dx=\left(\frac{x^3}{3}-\frac{x^{1.5}}{1.5}\right)$$

2 גרפים נחתכים יותר מפעמיים:



פולינומי:

$f(x)=24x^3+96x^2+48x+5$

$g(x)=12x^3+72x^2+84x+5$

נקודות חיתוך:

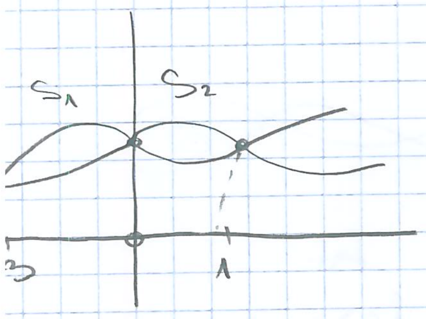
$24x^3+96x^2+48x+5=12x^3+72x^2+84x+5$

$12x^3+24x^2-36x=0$

$x(x^2+2x-3)=0$

$x=0$ או $x^2+2x-3=0$

$x_1=1 \qquad x_2=-3$



$$S_1=\left|\int_{-3}^{0}(12x^3+24x^2-36x)dx\right|$$

$$=\left|(3x^4+8x^3-18x^2)\Big|_{-3}^{0}\right|$$

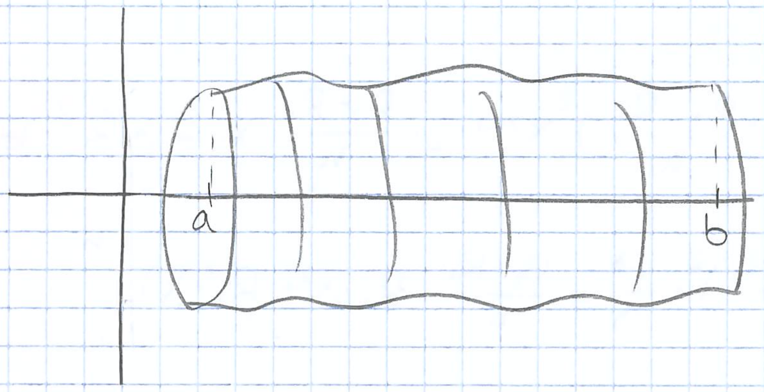
$$= 0-(3\cdot81-8\cdot27-18\cdot9) = -27(9-8-6) = 135$$

$$S_2 = \left|\int_0^1 (12x^3+24x^2-36x)\,dx\right| =$$

$$= \left|(3x^4+8x^3-18x)\Big|_0^1\right| = |-7-0| = 7$$

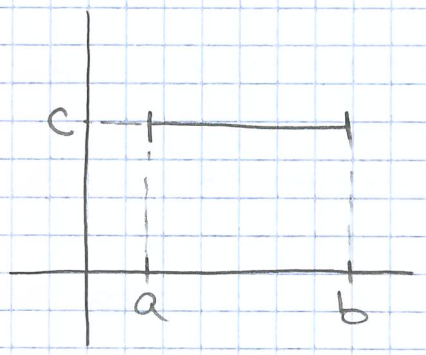
הכולל: 142.

נפח של גוף סיבוב:



$$V = \pi\cdot\int_a^b f^2(x)\cdot dx$$

①



גליל

$h = b-a$

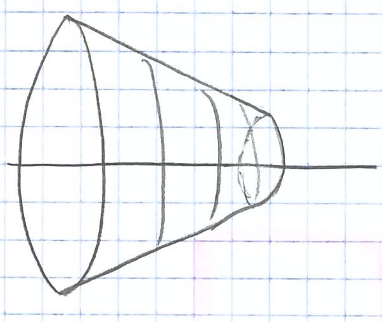
$R = c$

תזכורת:

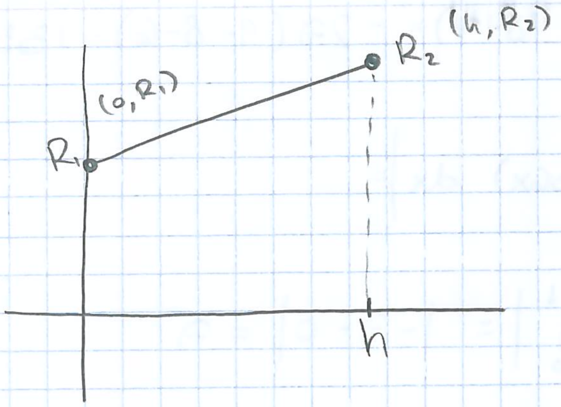
$\pi R^2\cdot h$

$$V = \pi\cdot\int_a^b c^2\,dx = \pi c^2\cdot x\Big|_a^b$$

$$= \pi c^2(b-a)$$



רדיוס תחתון R_1, העליון R_2, הגובה h.



$$f(x)=\frac{R_2-R_1}{h}\cdot x+R_1$$

$$V=\pi\cdot\int_0^h\left(\frac{R_1-R_2}{h}\cdot x+R_1\right)^2dx$$

$$V=\pi\int_0^h\left(\left(\frac{R_2-R_1}{h}\right)^2x^2+2\cdot\frac{R_2-R_1}{h}\cdot x\cdot R_1+R_1^2\right)dx$$

$$=\pi\left(\left(\frac{R_2-R_1}{h}\right)^2\cdot\frac{x^3}{3}+\frac{R_2-R_1}{h}\cdot R_1\cdot x^2+R_1^2\cdot x\right)\Big|_0^h=$$

$$=\pi\cdot\left(\left(\frac{R_2-R_1}{h}\right)^2\frac{h^3}{3}+\frac{R_2-R_1}{h}\cdot R_1\cdot h^2+R_1^2\cdot h\right)$$

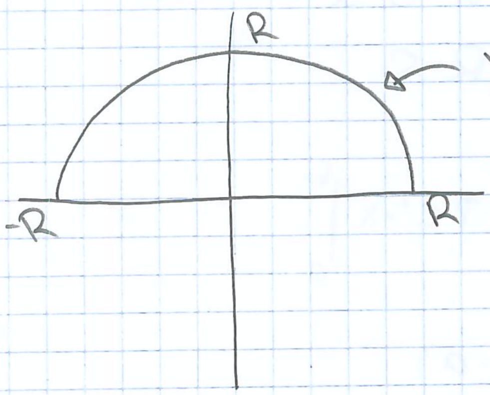
פותחי צמצום וכו'.

$$V=\pi\cdot h\cdot\frac{R_1^2+R_1\cdot R_2+R_2^2}{3}$$

אם $R_1=R_2$ ← גליל: $\boxed{V=\pi\cdot h\cdot R_1^2}$

אם $R_1=0$ ← חרוט: $\boxed{V=\pi\cdot h\cdot\frac{R_2^2}{3}}$

נפח הכדור:



$y=\sqrt{R^2-x^2}$

$$x^2+y^2=R^2\Rightarrow y^2=R^2-x^2$$

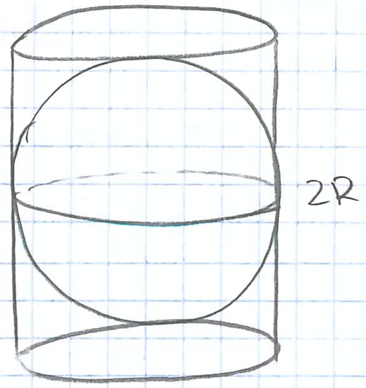
$$y=\sqrt{R^2-x^2}$$

$$V=\pi\int_{-R}^{R}\left(\sqrt{R^2-x^2}\right)^2dx=\int_{-R}^{R}(R^2-x^2)\,dx$$

$$=\pi\left(R^2\cdot x-\frac{x^3}{3}\right)\Big|_{-R}^{R}$$

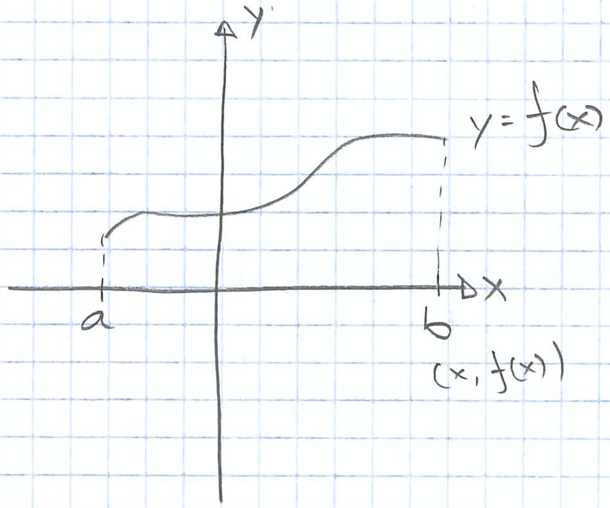
$$=\pi\left(\frac{2}{3}R^3-\left(-\frac{2}{3}R^3\right)\right)=\boxed{\frac{4}{3}\pi R^3}$$

.8



חישוב אורך של עקומה:

משוואה של עקומה במישור:



פרמטרים:

$x = x(t)\ ,\ y = y(t)$

$t_0 \le t \le t_1$

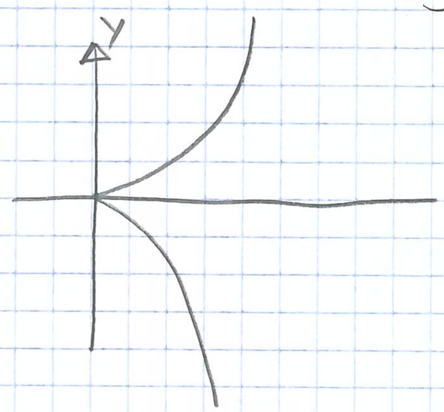
דוגמא:

$x = t\ ,\ y = t^2 \quad , \quad 0 \le t \le 5$

$t = x \rightarrow y = x^2$

$x = t^2,\ y = t^3 \quad , \quad \cancel{0}\ {-5} \le t \le 5$

$t = \sqrt{x} \rightarrow y = x^{\frac{3}{2}}$



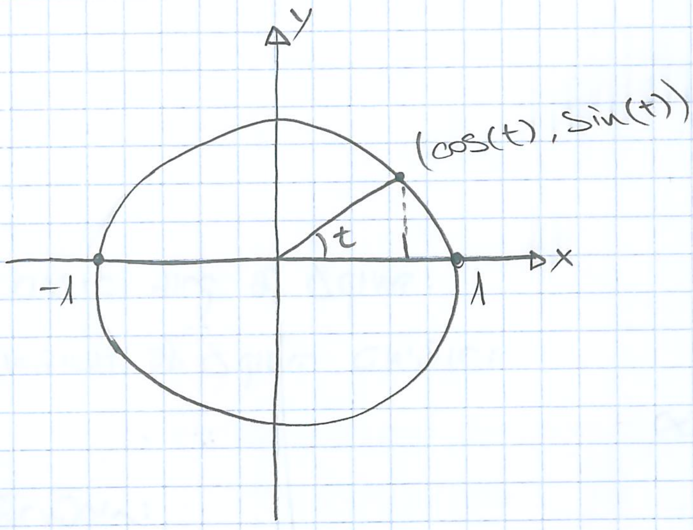
$t = 1 \rightarrow (1,1)$

$t = -1 \rightarrow (1,-1)$

דוגמא:

$x^2+y^2=1 \Leftarrow y=\sin(t) \quad x=\cos(t)$

$0 \le t < 2\pi$



נוסחה לחישוב אורך העקומה בצורה פרמטרית:

$x(t), y(t)$

$t_0 \le t \le t_1$

$$\ell = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(x))^2} \cdot dt$$

בתנאי שלפחות אחת מהנגזרות $x'(t)$, $y'(t)$ לא משנה סימן בקטע $[t_0,t_1]$

מקרה פרטי:

$x=t$ (כלומר $y=f(x)$)

$$f(x) = \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1+(y')^2}\, dx$$

דוגמא:

$x^2+y^2=1 \Leftarrow y=\sin(t),\ x=\cos(t)$

$0 \le t \le 2\pi$

היקף המעגל:

$$\ell = \int_0^{2\pi} \sqrt{\cos^2(t)+\sin^2(t)} \cdot dt = \int_0^{2\pi} 1 \cdot dt = t \Big|_0^{2\pi} = 2\pi$$

$0 \le x \le 5$ $\qquad y = \frac{x^2}{2}$

$$\ell = \int_0^5 \sqrt{1+x^2} \cdot dx$$

$$\boxed{\sinh(t) = \frac{e^t - e^{-t}}{2}} \qquad \boxed{\cosh(t) = \frac{e^t + e^{-t}}{2}}$$

$$\ell = \int_0^5 \sqrt{1+x^2}\, dx \underset{\sinh(t)}{=} \int_{t_0}^{t_1} \underbrace{\sqrt{1+\left(\frac{e^t - e^{-t}}{2}\right)^2}}_{\frac{e^t+e^{-t}}{2}} \cdot \frac{e^t + e^{-t}}{2}$$

$dx = \cosh(t)\, dt$

$$= \int_{t_0}^{t_1} \left(\frac{e^t + e^{-t}}{2}\right)^2 dt = \frac{1}{4}\int (e^{2t} + 2 + e^{-2t})\, dt =$$

$$= \left(\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot e^{2t} + \frac{1}{2}t - \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}e^{-2t}\right)\Big|_{t_0}^{t_1}$$

$\sinh(t_0) = 0$

$$\frac{e^t - e^{-t}}{2} = 0 \Leftrightarrow e^t = e^{-t} \Leftrightarrow t = -t \Leftrightarrow t = 0$$

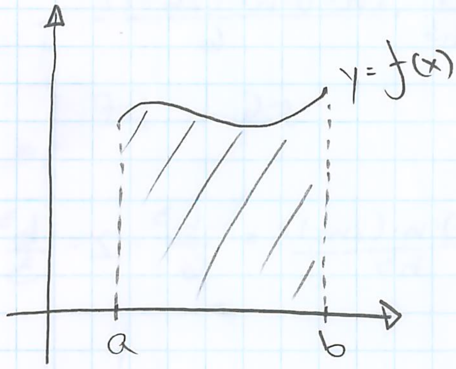
$\sinh(t_1) = 5$

$$\frac{e^t - e^{-t}}{2} = 5 \Leftrightarrow e^t - \frac{1}{e^t} = 10$$

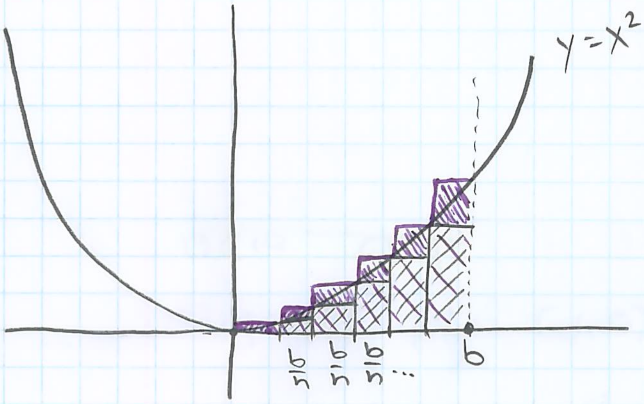
$$e^t = z \qquad z^2 - 10z - 1 = 0 \Rightarrow z_{1,2} = \frac{10 \pm \sqrt{100+4}}{2}$$

$$z = \frac{10 + \sqrt{104}}{2} = e^{t_1} \Rightarrow t_1$$

אינפי - שיעור 5:



$$F(b)-F(a)=\int_a^b f(x)\,dx$$



$\frac{b}{n} \leftarrow$ אורך הקטע

השטח בעפרון בגרף:

שטח

$$S \geq \left(\frac{b}{n}\right)^2\cdot\frac{b}{n}+\left(\frac{2b}{n}\right)^2\cdot\frac{b}{n}+\left(\frac{3b}{n}\right)^2\cdot\frac{b}{n}+\dots$$

$$\dots+\underbrace{\left(\frac{kb}{n}\right)^2\cdot\frac{b}{n}}_{\text{נוסחה לאיבר ה-k.}}+\dots+\underbrace{\left(\frac{(n-1)b}{n}\right)^2\cdot\frac{b}{n}}_{\text{איבר אחרון}} \geq$$

$$\geq \frac{b^3}{n^3}\cdot\left(1+2^2+3^2+\dots+(n-1)^2\right)$$

השטח בסגול בגרף:

$$\left(\frac{b}{n}\right)^2\cdot\frac{b}{n}+\left(\frac{2b}{n}\right)^2\cdot\frac{b}{n}+\dots+\left(\frac{n\cdot b}{n}\right)^2\cdot\frac{b}{n}$$

$$\frac{b^3}{n^3}\left[1+2^2+3^2+\dots+(n-1)^2+n^2\right] \leq S \leq \frac{b^3}{n^3}\cdot\left[1+2^2+3^2+\dots+(n-1)^2\right]$$

הוכחה באינדוקציה:

$$1+2^2+\dots+n^2=\frac{n\cdot(n+1)\cdot(2n+1)}{6}$$

$$n=1:\quad 1=\frac{1\cdot(1+1)(2\cdot1+1)}{6}$$

$$1^2+\dots+n^2+(n+1)^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+(n+1)^2=$$

$$=(n+1)\left(\frac{n(2n+1)}{6}+(n+1)\right)=(n+1)\,\frac{2n^2+n+6n+6}{6}=$$

$$=(n+1)\cdot\frac{2n^2+7n+6}{6}=(n+1)\cdot\frac{(n+2)(2n+3)}{6}=$$

$$=\frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$$

מ.ש.ל

$$\frac{b^3}{n^3}\cdot\frac{n\cdot(n+1)(2n+1)}{6} \geq S \geq \frac{b^3}{n^3}\cdot\frac{(n-1)\cdot n\cdot(2n-1)}{6}$$

לכל n טבעי

$$\lim_{n\to\infty} \frac{b^3\cdot(n-1)\cdot n\cdot(2n-1)}{n^3\cdot 6} = \frac{b^3}{6}\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{(n-1)\cdot n\cdot(2n-1)}{n^3} = \frac{b^3}{\cancel{6}}\cdot 2 = \frac{b^3}{3}$$

$$\frac{b^3}{3} \geq S \geq \frac{b^3}{3}$$

$$S = \frac{b^3}{3}$$

סכום רימן: Riemann

חלוקה של קטע $[a,b]$ ל-n חלקים:

$$\begin{array}{cccccccc} x_0 & x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_{n-1} & x_n \\ a & & & & & & b \end{array}$$

$$\Pi = \{x_0 = a < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n = b\}$$

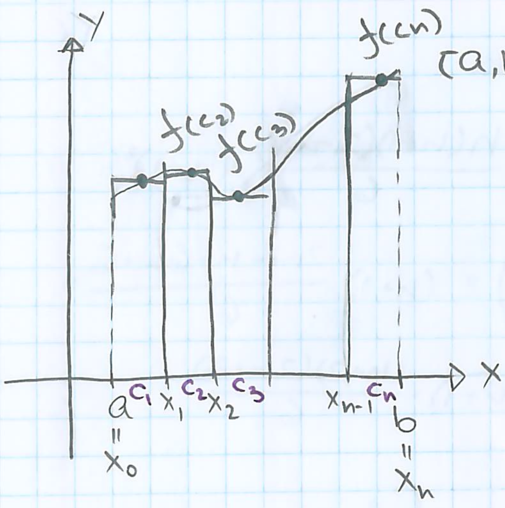
נגדיר:

$$\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$$

נסמן:

$$\Delta x_1 = x_1 - x_0, \dots, \Delta x_n = x_n - x_{n-1}$$

$$\boxed{\lambda(\Pi) = \max\{\Delta x_i \mid 1 \leq i \leq n\}}$$



נקח $y=f(x)$ פונקציה מוגדרת על קטע $[a,b]$

בכל קטע $[x_{i-1}, x_i]$ בוחרים נקודה c_k

$$f(c_1)\Delta x_1 + f(c_2)\Delta x_2 + \dots + f(c_n)\Delta x_n$$

$$\boxed{SR(f, \Pi, \{c_i\}_{i=1}^{n}) = \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i}$$

סכום רי...

הגדרה:

מספר I נקרא האינטגרל המסוים של פונקציה $y=f(x)$ בקטע $[a,b]$ אם $SR(f,\Pi,\{c_i\}) \to I$ כאשר $\lambda(\Pi)\to 0$

$$\boxed{I=\int_a^b f(x)\,dx}$$

הפונקציה $y=f(x)$ נקראת אינטגרבילית כאשר קיים: $\int_a^b f(x)\,dx$

(קיים $\lim\limits_{\lambda(\Pi)\to 0} SR(f,\Pi,\{c_i\})$)

הגדרה פורמלית:

(*) $$\boxed{\lim_{\lambda(\Pi)\to 0} SR(f,\Pi,\{c_i\}) = I} \iff$$

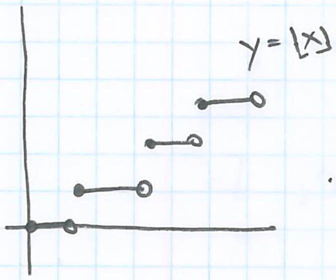
$\iff$ לכל $\varepsilon>0$ קיים $\delta(\varepsilon)>0$ כך שלכל חלוקה Π של $[a,b]$ שמקיימת $\lambda(\Pi)<\delta$ מתקיים

$$\boxed{|SR(f,\Pi,\{c_i\}) - I| < \varepsilon}$$

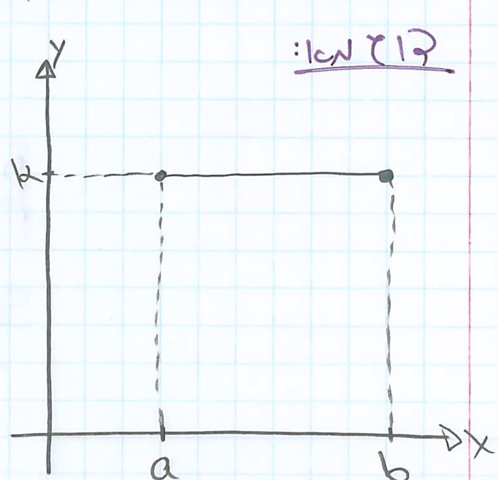
לכל בחירה של נקודות הביניים $c_i\in[x_{i-1},x_i]$

משפטים:

1. כל פונקציה רציפה בקטע $[a,b]$ אינטגרבילית.
2. כל פונקציה רציפה למקוטעין בקטע $[a,b]$ אינטגרבילית.
3. כל פונקציה מונוטונית למקוטעין אינטגרבילית.



קוד מאו:



$(b-a)k$

$$\int_a^b k\cdot dx = k\cdot(b-a)$$

נקח $\Pi=\{x_0=a<x_1<\dots<x_n=b\}$

חלוקה כלשהי של $[a,b]$

$$SR(f,\Pi,\{c_i\})=\sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i$$

$$=\sum_{i=1}^{n} k\Delta x_i = k\cdot\sum_{i=1}^{n}\Delta x_i =$$

$$=k(\cancel{x_1}-x_0)+(x_2-\cancel{x_1})+\cancel{\dots}+(\cancel{x_{n-1}}-\cancel{x_{n-2}})+(x_n-\cancel{x_{n-1}})=$$

$$=k(x_n-x_0)=k\cdot(b-a)\Rightarrow\int_a^b k\cdot dx = k|b-a$$

2. פונקציה דיריכלה

$$f(x)=\begin{cases}1, & \text{רציונלי } x\\ 0, & \text{לא רציונלי } x\end{cases}$$

לא אינטגרבילית:

אין גבול לסכומי רימן.

קבע $[0,1]$

כל c_i רציונלי, אזי:

$$SR=\sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i =$$

$$=\sum \Delta x_i = 1$$

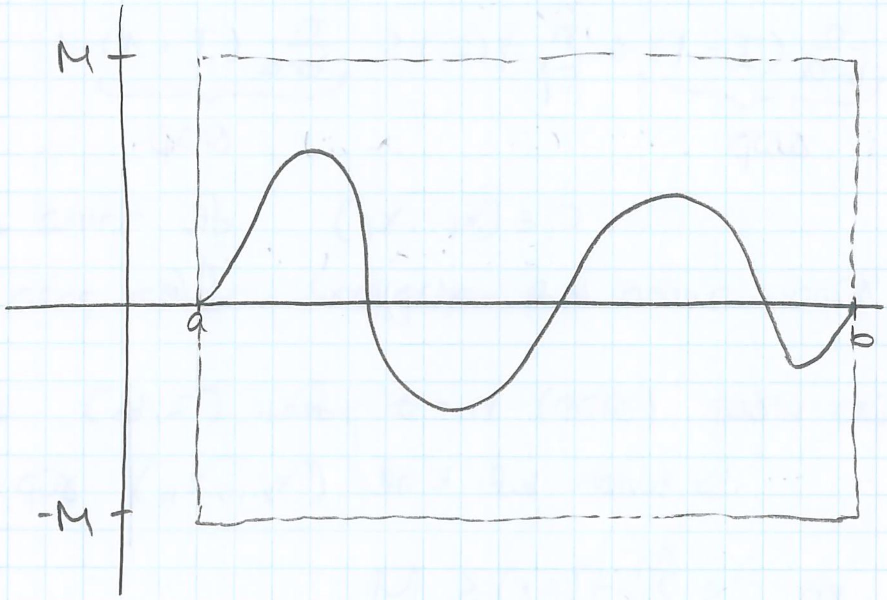
אם כל הנקודות $\{c_i\}$ לא רציונליים

$$SR=\sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i = 0$$

טענה:

כל פונקציה אינטגרבילית בקטע $[a,b]$ חסומה בו.

(תזכורת: $f(x)$ נקראת חסומה בקטע $[a,b]$ כאשר קיים מספר $M>0$ כך ש- $|f(x)| \le M$ לכל $x \in [a,b]$).



כל פונקציה רציפה בקטע סגור חסומה בו.

$f = \frac{1}{x}$ בקטע $[-1,1]$.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

$f(x)$ לא חסומה בקטע $[a,b]$ לכל $M>0$ קיים $x \in [a,b]$ כך ש-:

$$|f(x)| > M$$

הוכחה:

$f(x)$ אינטגרבילית $\Leftarrow$ קיים מספר I כך ש- ⊛ מתקיים.

נקח $\varepsilon = 1$. אזי קיים $\delta > 0$ כך ...

נקח $\Pi = \{x_0 = a, \dots, x_n = b\}$ חלוקה אחידה

$\Delta x_i = \frac{b-a}{n}$ כך ש- $\frac{b-a}{n} < \delta$. אזי

$$|SR(f, \Pi, \{c_i\}) - I| < 1$$

$$\left|\sum_{i=1}^{n} f(c_i)\cdot\frac{b-a}{n} - I\right| < 1$$

$$-1 < \frac{b-a}{n}\cdot\sum_{i=1}^{n} f(c_i) - I < 1$$

$$\underbrace{\frac{n}{b-a}(I-1)}_{\text{קבוע}} < \sum_{i=1}^{n} f(c_i) < \underbrace{\frac{n}{b-a}(I+1)}_{\text{קבוע}}$$

לכל בחירה של $c_i \in [x_{i-1}, x_i]$

נניח בדרך השלילה שהפונקציה לא חסומה בקטע $[a,b]$.

הקטע $[a,b]$ מחולק ל-n (קבוע) קטעים סופיים $\Leftarrow$

קיים קטע $[x_{k-1}, x_k]$ שהיא לא חסומה בו.

$$m \le \sum_{i=1}^{n} f(c_i) \le M$$

$$m \le f(c_1) + \dots + f(c_k) + \dots + f(c_n) \le M$$

נקח $c_1, \dots, c_n$ (חוץ מ-c_k) שווה של x_i. כך:

$$\underbrace{m - f(x_1) - \dots - f(x_n)}_{\text{קבוע}} \le f(c_k) \le \underbrace{M - f(x_1) - \dots - f(x_n)}_{\text{קבוע}}$$

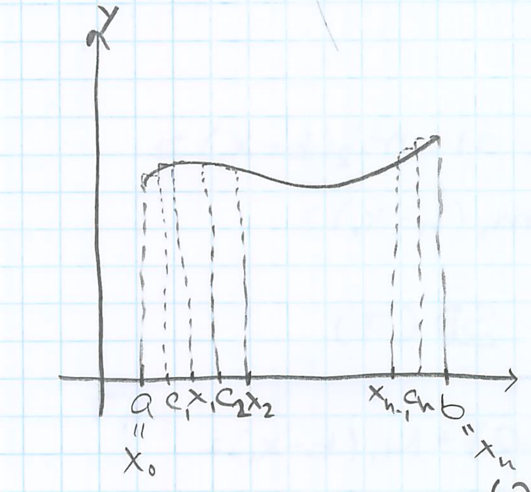
לא כולל c_k משתנה   לא כולל x_k

$\Leftarrow$ $f(x)$ חסומה בקטע $[x_{k-1}, x_k]$. סתירה!

אינפי - שיעור 5:

האינטגרל המסוים לפי רימן:

$f:[a,b]\to\mathbb{R}$ אינטגרבילית רימן $\iff$ הגבול $\lim_{\lambda(\pi)\to 0} SR(f,\pi,\{c_i\})$ קיים.



סכומי דרבו: (Darboux)

נניח ש- $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ חסומה.

$$SR(f,\pi,\{c_i\})=\sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i$$

נגדיר: $M_i=\sup_{c\in[x_{i-1},x_i]} f(c)$ (קיים כי f חסומה)

$$SR(f,\pi,\{c_i\})\le\sum_{i=1}^{n} M_i\Delta x_i$$

הסכום דרבו העליון: $\overline{SD}(f,\pi)$

סכום עליון מחשב את השטח מתחת לגרף לפי הנקודה המקסימלית במלבן.

נגדיר $m_i=\inf_{c\in[x_{i-1},x_i]} f(c)$

$$\underline{SD}(f,\pi)=\sum_{i=1}^{n} m_i\Delta x_i$$

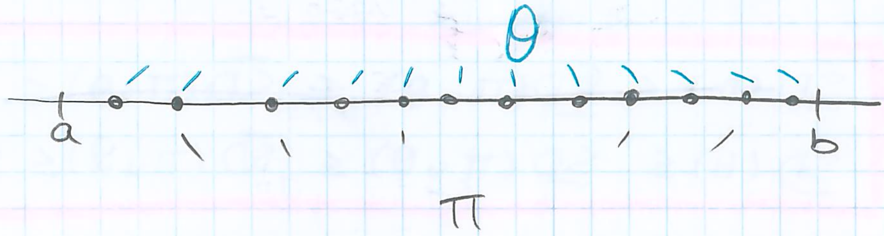
סכום תחתון מחשב את השטח מתחת לגרף לפי הנקודה המינימלית במלבן.

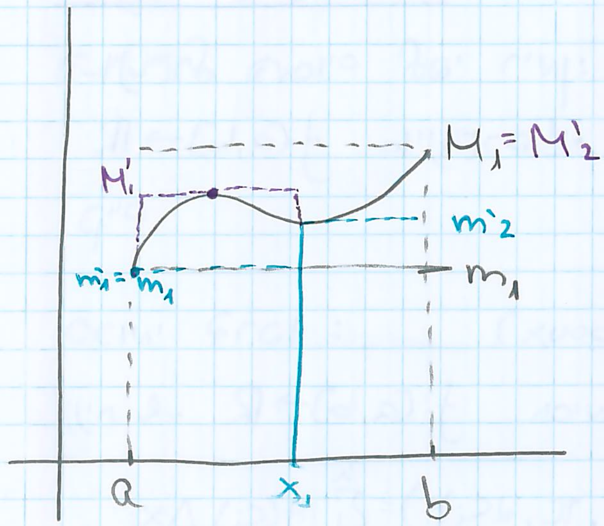
$$\underline{SD}(f,\pi)\le SR(f,\pi,\{c_i\})\le\overline{SD}(f,\pi)$$

$$\overline{SD}(f,\pi)-\underline{SD}(f,\pi)\ge 0$$

תכונות של סכומי דרבו:

אומרים שהחלוקה θ של $[a,b]$ מעדנת את החלוקה π של $[a,b]$ כאשר $\pi\subseteq\theta$





$\overline{SD} = M_1(b-a)$

$\underline{SD} = m_1(b-a)$

$\underline{SD} = m_1(x_1-a) + m'_2(b-x_1) \geq$

$\geq m_1(x_1-a) + m_1(b-x_1) =$

$= m_1(b-a) = \underline{SD}(\pi)$

$\overline{SD}(\theta) = M'_1(x_1-a) + M'_2(b-x_1) \leq M_1(x_1-a) + M_1(b-x_1) =$

$= M_1(b-a) = \overline{SD}(\pi)$

טענה:

אם חלוקה θ מעדנת את חלוקה π אזי:

$$\boxed{\underline{SD}(\pi) \leq \underline{SD}(\theta) \leq \overline{SD}(\theta) \leq \overline{SD}(\pi)}$$

2. לכל 2 חלוקות θ ו- π של $[a,b]$ מתקיים:

$$\underline{SD}(\pi) \leq \overline{SD}(\theta)$$

הוכחה:

החלוקה $\theta \cup \pi$ מעדנת את π ו- θ. לכן לפי התכונה הקודמת

$$\underline{SD}(\pi) \leq \overline{SD}(\pi \cup \theta)$$

$$\overline{SD}(\pi \cup \theta) \leq \overline{SD}(\theta)$$

$$\boxed{\begin{aligned} &\underline{SD}(\pi) \leq \underline{SD}(\pi \cup \theta) \leq \overline{SD}(\pi \cup \theta) \leq \overline{SD}(\pi) \\ &\underline{SD}(\theta) \leq \underline{SD}(\pi \cup \theta) \leq \overline{SD}(\pi \cup \theta) \leq \overline{SD}(\theta) \end{aligned}}$$

3. ...ה לב. קבוצה של כל סכומי דרבו $\underline{SD}(f,\pi)$ חסומה מלמעלה. אז מוגדר:

$$\sup \underline{SD}(f,\pi) = \underline{I}$$

כין כל חלוקות π של $[a,b]$

האינטגרל התחתון של דרבו.

האינטגרל העליון של דרבו:

$$\overline{I} = \inf \overline{SD}(f,\pi)$$

כין כל החלוקות π של $[a,b]$

$$\boxed{\underline{I} \le \overline{I}}$$

4. משפט:

פונקציה חסומה $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ אינטגרבילית רימן $\Longleftrightarrow$ $\underline{I} = \overline{I}$.

5. מסקנה:

נניח $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ פונקציה חסומה כלשהי. אם קיימת סדרה של חלוקות π_n כך ש- $\lambda(\pi_n)\to 0$, וגם מתקיים:

$$\lim_{n\to\infty} \overline{SD}(f,\pi_n) - \underline{SD}(f,\pi_n) = 0$$

(שווה ל-0) אז הפונקציה אינטגרבילית רימן בקטע $[a,b]$

דוגמא:

$f(x) = x^3$ ו- $[a,b] = [0,1]$

נקח $\pi_n = \{x_0 = 0, x_1 = \frac{1}{n}, x_2 = \frac{2}{n}, \dots, x_n = \frac{n}{n}\}$

$x_{i-1} = \frac{i-1}{n}$ $\quad$ $x_i = \frac{i}{n}$

$m_i = \left(\frac{i-1}{n}\right)^3$, $\quad M_i = \left(\frac{i}{n}\right)^3$

$$\overline{SD}(f,\pi_n)=\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{i}{n}\right)^3\cdot\frac{1}{n}$$

$$\underline{SD}(f,\pi_n)=\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{i-1}{n}\right)^3\cdot\frac{1}{n}$$

$$\overline{SD}-\underline{SD}=\frac{1}{n}\cdot\sum_{i=1}^{n}\underbrace{\left(\left(\frac{i}{n}\right)^3-\left(\frac{i-1}{n}\right)^3\right)}_{\geq}=$$

$$=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n}\left(\left(\frac{i}{n}\right)^2+\frac{i}{n}\cdot\frac{i-1}{n}+\left(\frac{i-1}{n}\right)^2\right)\leq\frac{1}{n^2}\cdot\sum_{i=1}^{n}3=\frac{1}{n^2}\cdot 3n=$$

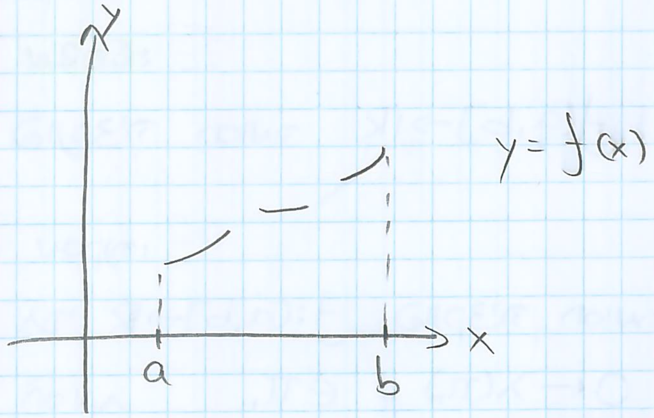
$$=\frac{3}{n}\rightarrow 0$$

כאשר $n\rightarrow\infty$

משפט:

כל פונקציה מונוטונית בקטע $[a,b]$ אינטגרבילית רימן

הוכחה: (עולה)



נוכיח שהפרש בין

סכומי דרבו שואף

ל-אפס

נקח חלוקה כלשהי

$$\pi=\{x_0=a,x_1<\ldots<x_n=b\}$$

$$\overline{SD}=\sum_{i=1}^{n}M_i\Delta x_i$$

$$M_i=\sup_{c\in[x_{i-1},x_i]}f(c)=f(x_i)\Longleftarrow f \text{ עולה}$$

$$\overline{SD}=\sum_{i=1}^{n}f(x_i)\,\Delta x_i$$

$$\underline{SD}=\sum_{i=1}^{n}f(x_i-1)\,\Delta x_i\Longleftarrow \inf_{c\in[x_{i-1},x_i]}f(c)=f(x_{i-1})\Longleftarrow f \text{ עולה}$$

אז:

$$\overline{SD}-\underline{SD}=\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x_i-\sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1})\Delta x_i=$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\left(f(x_i)-f(x_{i-1})\right)\underset{\lambda(\pi)}{\underset{\wedge|}{\Delta x_i}}\le\sum_{i=1}^{n}\left(f(x_i)-f(x_{i-1})\right)\cdot\lambda(\pi)=$$

$$=\lambda(\pi)\cdot\sum_{i=1}^{n} f(x_i)-f(x_{i-1})=\lambda(\pi)\left(f(x_1)-f(x_0)+f(x_2)-f(x_1)\ldots\right.$$

$$\ldots f(x_n)-f(x_{n-1})=\lambda(\pi)\cdot f(b)-f(a)$$

$$\overline{SD}-\underline{SD}\le\left(f(b)-f(a)\right)\cdot\lambda(\pi)$$

כאשר $\lambda(\pi)\to 0$ ההפרש $\overline{SD}-\underline{SD}\to 0$ מ.ש.ל.

ניתן להוכיח שכל פונקציה רציפה בקטע $[a,b]$ אינטגרבילית בו.

כל פונקציה מונוטונית למקוטעין (רציפה למקוטעין) גם אינטגרבילית.

תכונות של האינטגרל המסוים:

1. $$\boxed{\int_a^a f(x)\,dx=0}$$

2. $$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx=-\int_b^a f(x)\,dx}$$

3. אם פונקציה f אינטגרבילית בקטע $[a,b]$ אז היא אינטגרבילית בכל תת-קטע $[c,d]\subseteq[a,b]$

4. Additive:
אם f אינטגרבילית בקטע $[a,b]$ וגם אינטגרבילית בקטע $[b,c]$ אז היא אינטגרבילית בקטע $[a,c]$ ו-:

$$\boxed{\int_a^c f(x)\,dx=\int_a^b f(x)\,dx+\int_b^c f(x)\,dx}$$

5. לינאריות:

אם f,g אינטגרביליות בקטע $[a,b]$ אז כל צירוף לינארי שלהן $\alpha\cdot f(x)+\beta\cdot g(x)$ $(\alpha,\beta\in\mathbb{R})$ גם אינטגרבילי ו-:

$$\boxed{\int_a^b(\alpha\cdot f(x)+\beta\cdot g(x))\,dx=\alpha\cdot\int_a^b f(x)\,dx+\beta\cdot\int_a^b g(x)\,dx}$$

6. אם f,g אינטגרביליות בקטע $[a,b]$ אז גם $f(x)\cdot g(x)$ אינטגרבילי.

7. אם f אינטגרבילית בקטע $[a,b]$ אזי גם $|f|$ אינטגרבילית וגם:

$$\boxed{\left|\int f(x)\,dx\right|\le\int|f(x)|\,dx}$$

8. אם f אינטגרבילית בקטע $[a,b]$ ו- $f(x)\ge 0$ בו. אזי:

$$\int_a^b f(x)\,dx\ge 0$$

9. אם f,g אינטגרביליות בקטע $[a,b]$ ו- $f(x)\ge g(x)$ לכל $x\in[a,b]$, אזי:

$$\int_a^b f(x)\,dx\ge\int_a^b g(x)\,dx$$

הוכחה:

$f-g$ אינטגרבילית לפי לינאריות ו-

$$\int_a^b \underbrace{f(x)-g(x)}_{\ge 0}\,dx=\int_a^b f(x)\,dx-\int_a^b g(x)\,dx$$

לפי (8): $0\le\int_a^b(f(x)-g(x))\,dx$

10. אם f אינטגרבילית ב- $[a,b]$ ו- $m \le f(x) \le M$ לכל $x \in [a,b]$ אזי:

$$\boxed{m(b-a) \le \int_a^b f(x)\,dx \le M\cdot(b-a)}$$

הוכחה:

מ-⑨ והנתון $m \le f(x) \le M$ נובע ש-:

$$\int_a^b m\cdot dx \le \int_a^b f(x)\,dx \le \int_a^b M\cdot dx$$

$$\int_a^b m\cdot dx = m(b-a), \qquad \int_a^b M\cdot dx = M(b-a)$$

מ.ש.ל.

11. משפט ערך הממוצע (אינטגרלי):

אם f רציפה בקטע $[a,b]$ אז קיימת נקודה $c \in [a,b]$ כך ש-:

$$\boxed{\frac{\int_a^b f(x)\,dx}{b-a} = f(c)}$$

הוכחה:

f רציפה $\leftarrow$ אינטגרבילית $\leftarrow$ $\int_a^b f(x)\,dx$ קיים.

חסומה בקטע $[a,b]$. לפי משפט ויירשטרס קיימות נקודות X_{max} ו- X_{min} בקטע $[a,b]$ כך ש-

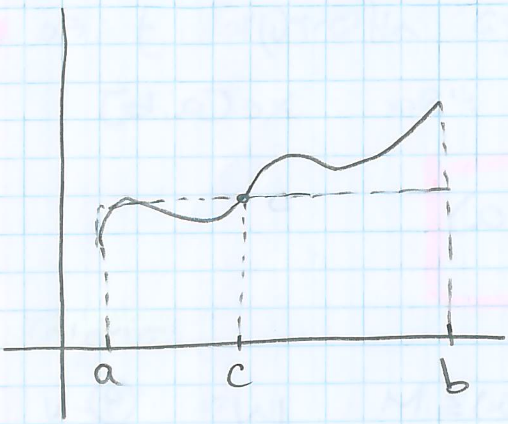
$$f(x_{min}) \le f(x) \le f(x_{max})$$

לפי ⑩:

$$f(x_{min})\cdot(b-a) \le \int f(x)\,dx \le f(x_{max})\cdot(b-a)$$

$$f(x_{min}) \le \frac{\int_a^b f(x)\,dx}{b-a} \le f(x_{max})$$

f רציפה, לכן לכל $f(x_{min}) \le y \le f(x_{max})$ יש $c \in [a,b]$ כך ש-: $y = f(c)$ מ.ש.ל.



12. אם f ו- $\tilde{f}$ שתי פונקציות המוגדרות ב- $[a,b]$ ושונות במספר סופי של נקודות אזי:

$$f \text{ אינטגרבילית } \iff \tilde{f} \text{ אינטגרבילית}$$

ו-:

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx = \int_a^b \tilde{f}(x)\,dx}$$

הקדמה לנושא הבא:

נניח ש- $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ אינטגרבילית. אזי לכל $a\le x\le b$ הפונקציה f אינטגרבילית בקטע $[a,x]$:

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$$

פונקציה צוברת שטח!

משפט:

אם f אינטגרבילית אזי $F(x)$ רציפה.

הוכחה:

צ"ל: $\lim_{x\to x_0} F(x) = F(x)$

נביט ב-:

$$|F(x)-F(x_0)| =$$

$$= \left|\int_a^x f(t)\,dt - \int_a^{x_0} f(t)\,dt\right|$$

אדיטיביות $\Longleftarrow$ $\int_a^x f(t)\,dt = \int_a^{x_0} f(t)\,dt + \int_{x_0}^x f(t)\,dt$

$$|F(x)-F(x_0)| = \left|\int_{x}^{x_0} f(t)\,dt\right| \le \int_{x_0}^{x} |f(t)|\,dt$$

f אינטגרבילית $\leftarrow$ חסומה $\leftarrow$ $|f(t)|\le M$ לכל $t\in[a,b]$

אז:

$$\int_{x_0}^{x} |f(t)|\,dt \le M(x-x_0)$$

$$\Downarrow$$

$$|F(x)-F(x_0)| \le M(x-x_0)$$

כאשר $x\to x_0$ הצד הימני שואף לאפס $\leftarrow$ $|F(x)-F(x_0)| \to 0$

מ.ש.ל.

משפט (Newton-Leibnitz):

אם $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ רציפה אז הפונקציה $F(x)=\int_a^x f(t)\,dt$ גזירה

ו- $F'(x)=f(x)$

הוכחה:

נחשב את $F'(x_0)$: $\quad F'(x_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0}$

$$\frac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0} = \frac{\int_{x_0}^{x} f(t)\,dt}{x-x_0}$$

לפי משפט ערך הביניים בגרסה האינטגרלית קיימת נקודה $x_0 \le C_x \le x$

כך ש-:

$$\frac{\int_{x_0}^{x} f(t)\,dt}{x-x_0} = f(C_x)$$

כאשר $x\to x_0$ אז $C_x\to x_0$.

f רציפה $\leftarrow$

$$\lim_{x\to x_0} f(C_x) = f\left(\lim_{x\to x_0} C_x\right) \rightarrow \lim_{x\to x_0} f(C_x) = f(x_0)$$

אינפי - שיעור 6:

משפט ניוטון-לייבניץ:

אם $f(x)$ רציפה בקטע $[a,b]$ אז $\left(\int_a^x f(t)\,dt\right)' = f(x)$.

אם f רציפה ו- $F(x)$ היא קדומה שלה אז:

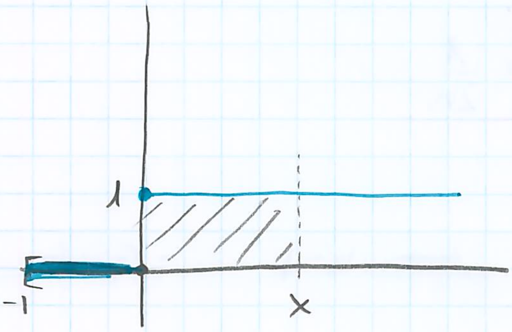
$$\int_a^b f(t)\,dt = F(b) - F(a)$$

$$\int_{a(x)}^{b(x)} f(t)\,dt = F(b(x)) - F(a(x))$$

$$\Downarrow$$

$$\left(\int_{a(x)}^{b(x)} f(t)\,dt\right)' = f(b(x))\cdot b'(x) - f(a(x))\cdot a'(x)$$

דוגמא:



$$F(x) = \int_{-1}^{x} f(t)\,dt = \begin{cases} 0, & x\le 0 \\ x, & x>0 \end{cases}$$

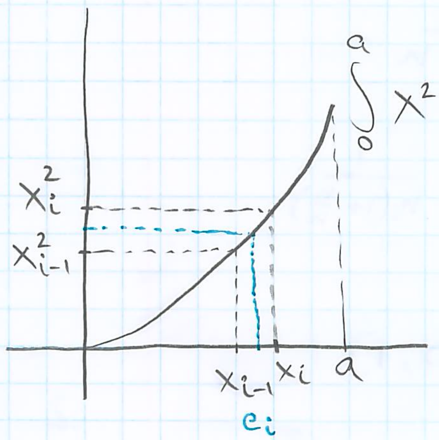
לא גזירה ב- $x=0$.

שימוש באינטגרלים לחישוב גבולות:

משפט:

אם f אינטגרבילית רימן בקטע $[a,b]$ אז לכל סדרה מנורמת של חלוקות Π_n ($\lambda(\Pi_n)\to 0$) $\lim_{n\to\infty} SR(f,\Pi_n,\{c_i\})$ מתכנס לערך האינטגרל $\int_a^b f(x)\,dx$

דוגמא:



$$\int_0^a x^2\,dx = \frac{a^3}{3}$$

$f(x)=x^2$

x^2 רציפה $\Longleftarrow$ אינטגרבילית

נקח $x_i = \frac{i}{n}a$ כאשר $0\le i\le n$

$x_{i-1}^2 \le c_i^2 \le x_i^2 \leftarrow x_{i-1}\le c_i\le x_i$

נקח c_i כך ש-

$$c_i^2 = \frac{x_{i-1}^2 + x_{i-1}\cdot x_i + x_i^2}{3}$$

$$x_{i-1}^2 < c_i^2 < x_i^2$$

$$SR(x^2, \Pi, \{c_i\}) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{x_{i-1}^2 + x_{i-1}\cdot x_i + x_i^2}{3}\cdot (x_i - x_{i-1}) =$$

$$= \frac{1}{3}\cdot \sum_{i=1}^{n} (x_{i-1}^2 + x_{i-1}\cdot x_i + x_i^2)\cdot (x_i - x_{i-1}) =$$

$$= \frac{1}{3}\cdot \sum_{i=1}^{n} (x_i^3 - x_{i-1}^3) = \frac{1}{3}\cdot (\cancel{x_1^3} - x_0^3 + \cancel{x_2^3} - \cancel{x_1^3} + \cancel{\ldots} + x_n^3 - \cancel{x_{n-1}^3}) =$$

$$= \frac{1}{3}(x_n^3 - x_0^3) = \frac{1}{3}n^3$$

דוגמא: (תמיד יש במבחן)

$$L_n = \underbrace{\frac{1}{n+1} + \ldots + \frac{1}{2n}}_{n}$$

למשל: $n=1 \rightarrow L_1 = \frac{1}{2}$

$n=2 \rightarrow L_2 = \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{7}{12}$

$n=3 \rightarrow L_3 = \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} = \frac{37}{60}$

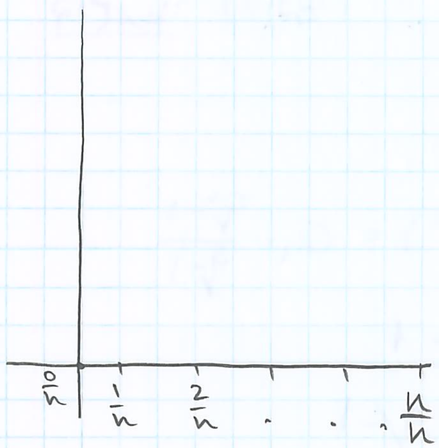
צ"ל: $\lim_{n\to\infty} L_n$

$$L_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{n+k} + \ldots + \frac{1}{n+n}$$

$$= \frac{1}{n\cdot(1+\frac{1}{n})} + \frac{1}{n\cdot(1+\frac{2}{n})} + \ldots + \frac{1}{n\cdot(1+\frac{k}{n})} + \ldots + \frac{1}{n(1+\frac{n}{n})}$$

$$= \frac{1}{n}\cdot\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{1+\frac{i}{n}} \qquad \frac{1}{n} \le \frac{i}{n} \le 1 \Longrightarrow \frac{i}{n} \in [0,1]$$

$$\frac{1}{n}\cdot\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{1+\frac{i}{n}} \stackrel{?}{=} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i$$



$$\Delta x_i=\frac{1}{n}$$

$$c_i=\frac{i}{n}\in[x_{i-1},x_i]$$

$$f(x)=\frac{1}{1+x}$$

$$L_n=\sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i = SR\left(\frac{1}{1+x},\Pi_n,\{c_i\}\right)$$

כאשר $c_i=\frac{i}{n}$ ו- $\Delta x_i=\frac{1}{n}$

$$\lim_{n\to\infty} SR\left(\frac{1}{1+x},\Pi_n,\{c_i\}\right)=\int_0^1\frac{1}{1+x}\,dx=$$

$$=\ln|1+x|\Big|_0^1=\ln(2)-\ln(1)=\ln(2)$$

טורים

סדרה a_n $(n=1,2,\dots)$ למשל $(a_n=\frac{1}{n})$

$$S_n=a_1+\dots+a_n$$

אם S_n מגיע לסכום מספרי S כאשר $n\to\infty$ אז

$$\underbrace{\sum_{n=1}^{\infty}a_n}_{\text{טור}}=S$$

סכום אינסופי

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}a_k=?$$

אם הגבול קיים ושווה ל- S נכתוב $\sum_{k=1}^{n}a_k=S$

דוגמא: (הנדסי)

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$$

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_1 \cdot q^{k-1} = a_1(1+q+\dots+q^{n-1}) = a_1 \cdot \frac{q^n-1}{q-1}$$

$a_1 \neq 0$

$$\lim_{n\to\infty} a_1 \cdot \frac{q^n-1}{q-1} = a_1 \cdot \begin{cases} \infty, & q>1 \\ \frac{1}{1-q}, & 0 \le q < 1 \\ \frac{1}{1-q}, & -1 < q < 0 \\ \uparrow, & q < -1 \end{cases}$$

מתבדר (קופץ +,-,+,-,+,-)

$q=-1$ מתבדר

$q=1$

סיכום:

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_1 q^{k-1}$$

$|q|<1 \iff$ מתכנס

במקרה הזה

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_1 q^k = a_1 \cdot \frac{1}{1-q}$$

כאשר $|q| \ge 1$ הטור הנדסי לא מתכנס למספר סופי $\iff$ הוא מתבדר. $\iff$

$\sum_{k=1}^{\infty} k$ לא מתכנס.

$(1,2,3,4,\dots)$

סדרה a_n $(n=1,2,\dots)$ כאשר (למשל $a_n=\frac{1}{n}$)
הרמוני (harmonic)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\dots+\frac{1}{n}+\dots$$

מונוטונית עולה. $S_n = 1+\frac{1}{2}+\dots+\frac{1}{n}$

סדרה מונוטונית S_n מתכנסת $\iff$ היא חסומה.

$$1+\frac{1}{2}+\underbrace{\frac{1}{3}+\frac{1}{4}}_{>\frac{1}{2}}+\underbrace{\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}}_{>\frac{1}{2}}$$

$$+\underbrace{\frac{1}{9}+\dots+\frac{1}{16}}_{>\frac{1}{2}}$$

$$S_{2^n} \geq 1+\frac{n}{2}$$

הוכחה:

אינדוקציה לפי n.

בדיקה: $n=1 \Leftarrow$ $S_2 = 1+\frac{1}{2} = 1+\frac{n}{2}$

נניח ש- $S_{2^n} \geq 1+\frac{n}{2}$. נוכיח עבור $n+1$:

$$S_{2^{n+1}} = S_{2^n} + \underbrace{\frac{1}{2^n+1}+\dots+\frac{1}{2^n+2^n}}_{2^n}$$

$\frac{1}{2^n}$ האחרון

כל אחד מהמחוברים $\frac{1}{2^n+k}$ גדול מ- $\frac{1}{2^{n+1}}$

לכן $S_{2^{n+1}} > S_{2^n} + 2^n \cdot \frac{1}{2^{n+1}} \Leftarrow S_{2^{n+1}} > 1+\frac{n}{2}+\frac{1}{2}$

$\Leftarrow$ $S_{2^{n+1}} > 1+\frac{n+1}{2}$. מ.ש.ל.

מכן נובע שסדרה S_{2n+1} לא חסומה $\Longleftarrow$ לא מתכנסת
$\Longleftarrow$ גם הטור לא מתכנס.

תנאי הכרחי להתכנסות הטור:

אם $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ מתכנס אז $\lim_{k\to\infty} a_k = 0$

הוכחה:

נסמן $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$. אז $a_n = S_n - S_{n-1}$

אם הטור מתכנס, אז $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} (S_n - S_{n-1})$

$$= \lim_{n\to\infty} S_n - \lim_{n\to\infty} S_{n-1} = 0$$ מ.ש.ל.

ההפך לא נכון. ז"א אם הסדרה מתכנסת לאפס, אז הטור לא בהכרח מתכנס. (דוגמא: $\sum \frac{1}{n}$)

סדרה $\overset{?}{\longleftrightarrow}$ טור

איך לבנות טור מסדרה?

$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots,\quad \frac{1}{n} = \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n-1}\right) + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n-2}\right) + \dots + \left(\frac{1}{2} - 1\right) + 1$

$$\frac{1}{4} = \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - 1\right) + 1$$

טור טלסקופי

$$S_n = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \dots + \frac{1}{n\cdot(n+1)}$$

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}$$

$$S_1 = \frac{1}{2},\quad S_2 = \frac{4}{6} = \frac{2}{3},\quad S_3 = \frac{3}{4}$$

$$S_n = \frac{n}{n+1}$$

$$S_6 = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \frac{1}{4\cdot 5} + \frac{1}{5\cdot 6} + \frac{1}{6\cdot 7} =$$

$$= \left(1 - \cancel{\tfrac{1}{2}}\right) + \left(\cancel{\tfrac{1}{2}} - \cancel{\tfrac{1}{3}}\right) + \left(\cancel{\tfrac{1}{3}} - \cancel{\tfrac{1}{4}}\right) + \left(\cancel{\tfrac{1}{4}} - \cancel{\tfrac{1}{5}}\right) + \left(\cancel{\tfrac{1}{5}} - \cancel{\tfrac{1}{6}}\right) + \left(\cancel{\tfrac{1}{6}} - \tfrac{1}{7}\right)$$

$= 1 - \frac{1}{7} = \frac{6}{7}$

באופן דומה: $S_n = \frac{n}{n+1}$

הטור $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k\cdot(k+1)}$ מתכנס ל- 1.

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} = 1$$

טורים חיוביים:

הטור $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ (נקרא חיובי) $\iff$ $a_k > 0$ לכל $k \geq 1$

לטור חיובי סדרת הסכומים החלקיים $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ הינה מונוטונית עולה.

מסקנה:

טור חיובי מתכנס $\longleftrightarrow$ סדרת הסכומים החלקיים שלו חסומה.

מבחן ההשוואה:

יהיו $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ ו- $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ שני טורים חיוביים כלשהם.

נניח ש- $a_k \leq b_k$, אזי

א. אם הטור $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ מתכנס אז הטור $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ מתכנס.

ב. אם הטור $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ מתבדר אז הטור $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ מתבדר.

הוכחה:

א. $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ מתכנס $\Longrightarrow$ קיים חסם M כך ש-

$S_n(b) = \sum_{k=1}^{n} b_k \leq M$. אזי

$$S_n(a) = \sum_{k=1}^{n} a_k \leq \sum_{k=1}^{n} b_k = S_n(b) \leq M$$

$\Longrightarrow S_n(a)$ מונוטונית וחסומה $\Longrightarrow$ מתכנסת (מ.ש.ל א'.)

ב. $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ מתבדר ⇐ הסדרה $S_n(a) = \sum_{k=1}^{n} a_k$ לא חסומה

$$S_n(a) = \sum_{k=1}^{n} a_k \le \sum_{k=1}^{n} b_k = S_n(b)$$

$S_n(a) \le S_n(b)$ ו- $S_n(a)$ לא חסומה, לכן גם $S_n(b)$
לא חסומה ⇐ הטור $\sum_{k=1}^{n} b_k$ מתבדר. מ.ש.ל.

דוגמאות:

א. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$

$$S_5 = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \frac{1}{25} = 1.463\ldots$$

$$\begin{array}{ccccccccc} 1+ & \frac{1}{4} & + & \frac{1}{9} & + & \frac{1}{16} & + & \frac{1}{25} \\ & \wedge & & \wedge & & \wedge & & \wedge \\ & \frac{1}{1\cdot 2} & & \frac{1}{2\cdot 3} & & \frac{1}{3\cdot 4} & & \frac{1}{4.5} \end{array}$$

$$S_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{n^2} < 1 + \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \ldots + \frac{1}{(n-1)n} =$$

$$= 1 \cdot \left(1 - \cancel{\tfrac{1}{2}}\right) + \left(\cancel{\tfrac{1}{2}} - \cancel{\tfrac{1}{3}}\right) + \left(\cancel{\tfrac{1}{3}} - \cancel{\tfrac{1}{4}}\right) + \ldots + \left(\cancel{\tfrac{1}{n-1}} - \frac{1}{n}\right),$$

מתכנס ← $2 - \frac{1}{n}$

הוכחנו שהטור $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ מתכנס למספר בין 1.4 ל-2.

$\frac{\pi^2}{6}$

הטור ההרמוני $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ מתבדר.

ג. $\sum_{k=1} \frac{1}{k^\alpha}$ כאשר $0< \alpha \le 1$

(למשל $\sum \frac{1}{\sqrt{k}}$)

$\frac{1}{k} \le \frac{1}{k^\alpha}$ לכל k. הטור $\sum \frac{1}{k}$ מתבדר לכן

לפי מבחן ההשוואה הטור $\sum \frac{1}{k^2}$, $0<\alpha\le 1$ גם מתבדר.

ד. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha}$, $\alpha \ge 2$

(למשל $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^3}$)

$$\frac{1}{k^\alpha} \le \frac{1}{k^2}$$

הטור $\sum \frac{1}{k^2}$ מתכנס $\longrightarrow$ $\sum \frac{1}{k^\alpha}$ מתכנס.

$$\underset{\alpha>1}{f(\alpha)} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha}$$

אינפי - שיעור ד:

טורים:

$a_1, \dots, a_n$ סדרה

$S_1, S_2, \dots, S_n$ סדרת הסכומים החלקיים.

אם S_n מתכנסת אז אומרים שהטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס.

טענת זנב הטור:

נתונה סדרה $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ ונבחר k טבעי ונגדיר סדרה חדשה

$$b_1 = a_{k+1},\ b_2 = a_{k+2} \dots$$

נביט בסדרת הסכומים החלקיים S_n עבור a_n ובסדרת הסכומים החלקיים T_n עבור b_n אז S_n מתכנסת $\Leftrightarrow$ T_n מתכנסת

הערה:

לאו דווקא לאותו סכום.

הערה:

b_n נקראת הזנב ה-k-ים של a_n.

דוגמא:

סדרה: $a_n = n^2 - 5n$

$a_1 = -4,\ a_2 = -6,\ a_3 = -6,\ a_4 = -4,\ a_5 = 0,\ a_6 = 6$

זנב ה-5 של הסדרה.

$b_1 = 6,\ b_2 = 14, \dots$

בדוגמא זו רואים כי אם נמחק את 5 האיברים הראשונים של הסדרה המקורית נקבל סדרה של איברים חיוביים ולכן אפשר להפעיל על הטור של b_n את המשפטים שיש לנו עבור טורים חיוביים.

הוכחה:

$$T_j = b_1 + b_2 + \dots + b_j$$

$$S_{j+k} = a_1 + a_2 + \dots + a_k + \underset{a_{k+1}}{\underset{\parallel}{b_1}} + \underset{a_{k+2}}{\underset{\parallel}{b_2}} + \dots + \underset{a_{k+j}}{\underset{\parallel}{b_j}}$$

$$S_k + T_j = S_{j+k}$$

הוכחה:

הטור S_n מתכנס $\iff$ $\exists \lim\limits_{j+k\to\infty} S_{j+k}$

$$\exists \lim_{j\to\infty} S_{j+k}$$

$$\exists \lim_{j\to\infty} S_k + T_j \iff \exists \lim_{j\to\infty} T_j$$

ההבדל בין הגבולות S_k.

דוגמא:

$\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ מתכנס.

$$\frac{1}{2\cdot 2} \le \frac{1}{1\cdot 2} = 1 - \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{3\cdot 3} \le \frac{1}{2\cdot 3} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3}$$

$$\frac{1}{4\cdot 4} \le \frac{1}{3\cdot 4} = \frac{1}{3} - \frac{1}{4}$$

נסכם:

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k^2} \le 1 - \frac{1}{k+1}$$

משפט השוואת הגבול עבור טורים חיוביים:

(תהיינה סדרות חיוביות $\{a_n\}$ ו- $\{b_n\}$

(ניסוח יותר כללי: a_n ו- b_n חיוביות החל ממקום מסויים.

(ונניח כי קיים $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \alpha$ **אזי:**

א. אם $0<\alpha<\infty$ התכנסות $\sum a_n$ שקולה להתכנסות $\sum b_n$
(הם מתכנסים ומתבדרים כאחד)

ב. אם $\alpha=0$ התכנסות $\sum b_n$ גוררת התכנסות $\sum a_n$

ג. $\alpha=\infty$ התכנסות $\sum a_n$ גוררת התכנסות $\sum b_n$

דוגמא:

$$\sum \frac{n^2+5n+\sin(n)}{n^3-7n^2+\cos(n)+\frac{1}{n}}$$

(נסמן:

מהשאלה $= a_n$

$\frac{1}{n} = b_n$

(נ״ע על

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n^2+5n+\sin(n)}{n^3-7n^2+\cos(n)+\frac{1}{n}}}{\frac{1}{n}}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(n^2+5n+\sin(n))n}{n^3-7n^2+\cos(n)+\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{n^3}\left(1+\frac{5}{n}+\frac{\sin(n)}{n^2}\right)}{\cancel{n^3}\left(1-\frac{7}{n}+\frac{\cos(n)}{n^3}+\frac{1}{n^4}\right)} =$$

$$= \frac{1+0+0}{1-0+0+0} = 1$$

כיוון ש- $\sum b_n$ מתבדר
אז גם $\sum a_n$ מתבדר.

.3

הוכחה א':

נתון כי $\exists \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \alpha$

רעיון ההוכחה:

$$\frac{a_n}{b_n} \to 2$$

$$-\frac{1}{2} < \frac{a_n}{b_n} - 2 < \frac{1}{2}$$

נוסיף 2 לכל האגפים.

$$1.5 < \frac{a_n}{b_n} < 2.5$$

$$1.5b_n < a_n < 2.5b_n$$

מבחן ההשוואה:

נתונים סדרות a_n ו- b_n חיוביות (החל ממקום מסוים)

ונניח כי (החל ממקום מסוים) $a_n < b_n$ אזי.

התכנסות $\sum b_n$ גוררת התכנסות $\sum a_n$

התבדרות $\sum a_n$ גוררת התבדרות $\sum b_n$

הוכחה ב':

נבחר $\varepsilon = \frac{\alpha}{2}$ כיוון ש $0<\alpha$ אזי גם $0<\frac{\alpha}{2}$

ולכן קיים k כך ש-:

$$n>k \Longrightarrow \left|\frac{a_n}{b_n} - \alpha\right| < \frac{\alpha}{2}$$

כלומר

$$n>k \Rightarrow \alpha - \frac{\alpha}{2} < \frac{a_n}{b_n} < \alpha + \frac{\alpha}{2}$$

$$n>k \Rightarrow \frac{\alpha}{2} < \frac{a_n}{b_n} < \alpha\frac{3}{2}$$

כיוון ש- $0<b_n$ נכפול ונקבל:

$$n>k \quad b_n\cdot\frac{\alpha}{2} < a_n < \frac{b_n\cdot\alpha\cdot 3}{2}$$

עכשיו נסתמך על מבחן ההשוואה

נניח כי b_n סדרה חיובית וכי $\sum b_n$ מתכנס.

אז כפל בקבוע שומר על התכנסות הטור ולכן $\sum \frac{b_n \cdot n \cdot 3}{2}$

מתכנס גם כן.

וכיוון שידוע כי:

$$a_n < \frac{b_n \cdot d \cdot 3}{2}$$

נובע לפי מבחן ההשוואה כי $\sum a_n$ מתכנס.

נניח כי $\sum a_n$ מתכנס. נבנה מאי-שוויון

$$b_n \frac{d}{2} < a_n$$

נכפיל ב- $\frac{2}{d}$ ונקבל $b_n < \frac{2a_n}{d}$

כיוון ש- $\sum a_n$ מתכנס אז גם $\sum \frac{2a_n}{d}$ מתכנס ולכן לפי מבחן ההשוואה $\sum b_n$ מתכנס.

מבחן השוואת האינטגרל:

כדי לנסח את מבחן השוואת האינטגרל צריך ללמוד קודם את האינטגרל לא אמיתי.

כל האינטגרלים המסויימים שלמדנו היו ע"פ קטע סופי.

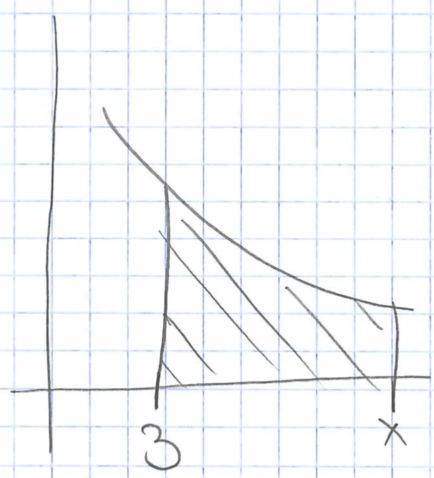
קודם מאז:

$$\int_3^4 x^2\,dx = \frac{x^3}{3}\Big|_3^4 = \frac{64-27}{3} \quad [3,4]$$

מטרתנו להגדיר:

$$\int_3^\infty \text{משהו} = ?$$

פתרון:



$$S(x) = \int_3^\infty f(t)\,dt$$

$$\lim_{x\to\infty} S(x)$$

הגדרה:

$$\int_a^\infty f(t)\,dt$$

יוגדר כי

$$\lim_{x\to\infty}\int_a^x f(t)\,dt$$ אם הגבול קיים.

דוגמא:

$$\int_1^\infty \frac{1}{t^2}\,dt \qquad S(x)=\int_1^x \frac{1}{t^2}\,dt =$$

$$= \frac{-1}{t}\Big|_{t=1}^{t=x} = -\frac{1}{x} - \frac{-1}{1} = 1-\frac{1}{x}$$

$$\int_1^\infty \frac{dt}{t^2} = \lim_{x\to\infty}\int_1^x \frac{dt}{t^2} = \lim_{x\to\infty} 1-\frac{1}{x} = 1$$

תרגיל:

$$\int_1^\infty \frac{1}{t}\,dt = ? \qquad S(x)=\int_1^x \frac{1}{t}\,dt =$$

$$= \ln(t)\Big|_{t=1}^{t=x} =$$

$$= \ln(x)-\ln(1) = \ln(x)$$

$$\int_1^\infty \frac{1}{t}\,dt = \lim_{x\to\infty}\int_1^x \frac{dt}{t} = \lim_{x\to\infty} \ln(x) = \infty$$

מבחן השוואה האינטגרל:

נתונה פונקציה $f(x)$ בעלת התכונות הבאות:

1. $f(x)$ יורדת
2. $f(x) \geq 0$ (חיובית)
3. $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$

נגדיר סדרה

$$a_1 = f(1),\ a_2 = f(2),\ \dots,\ a_n = f(n)$$

וטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$

והאינטגרל הלא אמיתי $\int_1^{\infty} f(t)\,dt$ אז:

הטור $\sum a_n$

והאינטגרל הלא אמיתי $\int_1^{\infty} f(t)\,dt$ מתכנסים ומתבדרים יחד.

דוגמא:

$$f(t) = \frac{1}{t^2}$$

חיובית יורדת מונוטונית.

$$\lim_{x\to\infty} f(t) = 0$$

סדרה:

$$f(1),\ f(2),\ \dots$$

$$1,\ \frac{1}{2^2},\ \frac{1}{3^2},\ \dots$$

טור $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ סופי

אינטגרל לא אמיתי $\int_1^{\infty} \frac{dt}{t^2} = 1$

דוגמא:

$$f(t) = \frac{1}{t}$$

סדרה: $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots$

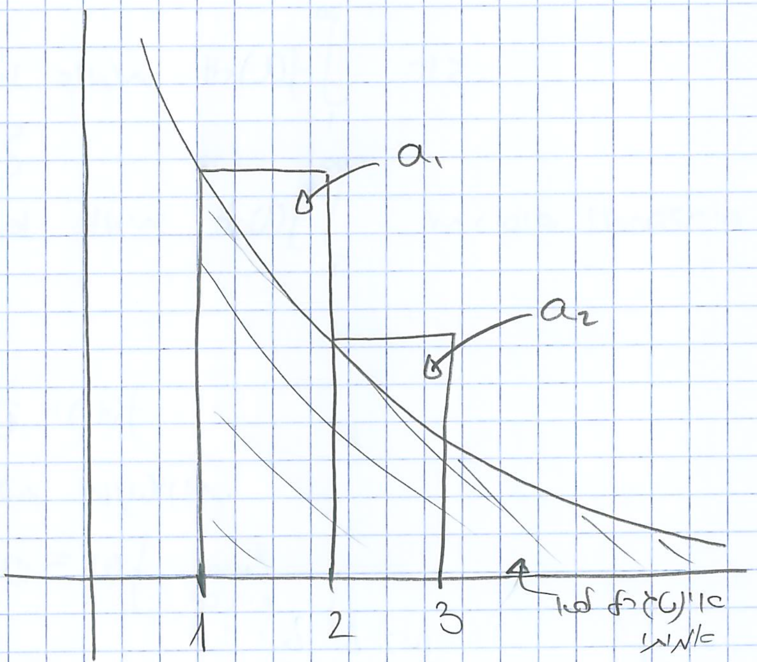
טור $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = \infty$

אינטגרל לא אמיתי: $\int_1^{\infty} \frac{dt}{t} = \infty$

ציור שמסביר את ההוכחה:

$a_1 = f(1)$

$a_2 = f(2)$



$$a_2 \le \int_1^2 f(t)\,dt \le a_1$$

$$a_3 \le \int_2^3 f(t)\,dt \le a_2$$

$$\vdots$$

הוכחה:

נשים לב ש n

$$a_{k+1} \le \int_k^{k+1} f(t)\,dt \le a_k$$

נסכם את האי-שוויון $k=1,\dots,n$

$$a_2+a_3+\dots+a_{n+1} \le \int_1^2 + \int_2^3 + \dots + \int_n^{n+1} \le a_1+a_2+\dots+a_n$$

$$\sum_{k=2}^{n+1} a_k \le \int_1^{n+1} f(t)\,dt \le \sum_{k=1}^{n} a_k$$

נשאיף את n ל- ∞ ונקבל:

$$\sum_{k=2}^{\infty} a_k \le \int_1^{\infty} f(t)\,dt \le \sum_{k=1}^{\infty} a_k$$

נניח הטור $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ מתכנס.

אז כיוון שזהו טור חיובי $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ חסום   נניח כי $\int_1^{\infty} f(t)\,dt$ מתכנס.

ולכן $\int_1^{\infty} f(t)\,dt$ חסום ולכן מתכנס.   לכן $\int_1^{\infty} f(t)\,dt$ חסום

אז $\sum_{k=2}^{\infty} a_k$ חסום

ולכן טור הזנב של $\sum a_k$ מתכנס ולכן $\sum a_k$ מתכנס.

דוגמא:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{\alpha}}$$

מתבדר $\alpha \le 1$

מתכנס $\alpha \ge 2$

דוגמאות שראינו:

$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ מתבדר

$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ מתכנס.

נניח $2 \le \alpha$

$$k^2 \le k^\alpha$$

סדרה $\Leftarrow$ $\frac{1}{k^\alpha} \le \frac{1}{k^2}$

לפי מבחן ההשוואה כיוון ש: $\sum \frac{1}{k^2}$ מתכנס

אז $\frac{1}{k^\alpha}$ מתכנס $\alpha \ge 2$

נניח $\alpha \le 1$

$$k^\alpha \le k$$

$$\frac{1}{k} \le \frac{1}{k^\alpha}$$

כיוון ש- $\sum \frac{1}{k}$ מתבדר אז לפי מבחן ההשוואה

$\sum \frac{1}{k^\alpha}$ מתבדר $\alpha \le 1$

$$\alpha = 1.5$$

$k < k^{1.5} < k^2$ גדול ממתכנס.

$$\frac{1}{k} \le \frac{1}{k^{1.5}} \le \frac{1}{k}$$

קטן ממתבדר

כל מבחני ההשוואה נכשלים.

נמ'ע על מבחן האינטגרל

$$f(t) = \frac{1}{t^{1.5}}$$

יורדת, חיובית, $\lim_{t \to \infty} = 0$

$t^{1.5}$ עולה וחיובית אז $\frac{1}{t^{1.5}}$ יורדת וחיובית.

ולכן $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{1.5}}$ מתכנס $\Longleftrightarrow$ $\int^{\infty} \frac{dt}{t^{1.5}}$ מתכנס.

$$\int_1^x \frac{dt}{t^{1.5}} = \frac{t^{-\frac{1}{2}}}{-\frac{1}{2}} \Bigg|_{t=1}^{t=x} = -\frac{2}{\sqrt{t}} \Bigg|_{t=1}^{t=x} =$$

$$= \frac{-2}{\sqrt{x}} + \frac{2}{\sqrt{1}} = 2 - \frac{2}{\sqrt{x}}$$

$$\exists \lim_{x\to\infty} \int \frac{dt}{t^{1.5}}$$

ולכן

$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{1.5}}$ מתכנס.

אינפי - שיעור 8:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{b_n}{a_n} = L$$

מבחן המנה (מבחן D'alamert)

יהי $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ טור חיובי. נניח שקיים הגבול $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$. אזי:

1. $L<1 \Leftarrow$ הטור מתכנס.
2. $L>1 \Leftarrow$ הטור מתבדר.
3. $L=1 \Leftarrow$ לא ברור.

הוכחה:

① $0<L<1$

קיים N כך ש-:

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n} - L\right| < \frac{1-L}{2}$$

$$-\frac{1-L}{2} < \boxed{\frac{a_{n+1}}{a_n} - L < \frac{1-L}{2}}$$

החל מ-N $n \geq N$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} < \frac{1-L}{2} = \frac{1+L}{2} < 1$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = (a_1 + \dots + a_{N-1}) + (a_N + a_{N+1} + \dots$$

צ"ל שהטור $\sum_{k=0}^{\infty} a_{N+k}$ מתכנס.

$$a_{N+k} = \frac{a_{N+k}}{a_{N+k-1}} \cdot \frac{a_{N+k-1}}{a_{N+k-2}} \cdot \dots \cdot \frac{a_{N+1}}{a_N} \cdot a_N$$

$$\Downarrow$$

$$a_{N+k} < \underbrace{\left(\frac{1+L}{2}\right)^k \cdot a_N}_{\text{טור הנדסי עם מנה } \frac{1+L}{2}<1}$$

לכן הטור $\sum\left(\frac{1+L}{2}\right)^k a_n$ מתכנס $\overset{\text{מבחן ההשוואה}}{\Longleftarrow}$ $\sum a_{N+k}$ מתכנס.

מ.ש.ל של 1.

הוכחה

(2) $L>1$

קיים N כך ש-

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}-L\right|<\frac{L-1}{2}$$

$$\Updownarrow$$

$$\boxed{-\frac{L-1}{2}<\frac{a_{n+1}}{a_n}-L}<\frac{L-1}{2}$$

$$1<\frac{L+1}{2}<\frac{a_{n+1}}{a_n}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=(a_1+\dots+a_{N-1})+(a_N+a_{N+1}+\dots$$

צ"ל שהטור $\sum a_{N+k}$ מתבדר

$$a_{N+k}=\frac{a_{N+k}}{a_{N+k-1}}\cdot\frac{a_{N+k-1}}{a_{N+k-2}}\cdot\ldots\cdot\frac{a_{N+1}}{a_N}\cdot a_N$$

$$a_{N+k}>\underbrace{\left(\frac{1+L}{2}\right)^k\cdot a_N}$$

כי הטור הנדסי עם מנה $1<\frac{1+L}{2}$

לכן הטור $\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1+L}{2}\right)^k a_n$ מתבדר $\overset{\text{מבחן ההשוואה}}{\Longleftarrow}$ $\sum a_{N+k}$ מתבדר

מ.ש.ל.

דוגמא:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n!}$$

מבחן המנה:

$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2^{n+1}}{(n+1)!}\cdot\frac{n!}{2^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{n+1}=0\Longrightarrow$ מתכנס!

דוגמא 2:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n^n}{n!} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{(n+1)^n} \cdot n^n = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n} = \frac{1}{e} < 1$$

$e \leftarrow$ אוילר $\leftarrow$

דוגמא 3:

$$\sum_{n=1}^{\infty}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1$$

מתבדר!

דוגמא 4:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

$$L = \lim_{n\to 0} \frac{a_{n+1}}{a_n} \frac{n^2}{(n+1)^2} = 1$$

מבחן השורש (Cauchy):

יהי $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ טור חיובי.

נניח שקיים הגבול:

$$L = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}$$

① $L < 1 \Rightarrow$ הטור מתכנס.

② $L > 1 \Rightarrow$ הטור מתבדר.

③ $L = 1 \Rightarrow$ לא ברור

הוכחה:

① עבור $\varepsilon = \frac{1-L}{2}$ קיים N שהחל ממנו מתקיים

$$\forall n \geq N : \left|\sqrt[n]{a_n} - L\right| < \frac{1-L}{2}$$

$$\Downarrow$$

$$\sqrt[n]{a_n} - L < \frac{1-L}{2}$$

$$\Downarrow$$

$$\sqrt[n]{a_n} < \frac{1+L}{2} < 1$$

טור הנדסי מתכנס $\longleftarrow$ $a_n < \left(\frac{1+L}{2}\right)^n$

לכל $n \geq N$

לכן לפי מבחן ההשוואה לטור $\sum_{n=N}^{\infty} a_n$ מתכנס

② עבור $\varepsilon = \frac{L-1}{2}$ קיים N שהחל ממנו מתקיים

$$\forall n \geq N : \left|\sqrt[n]{a_n} - L\right| < \frac{L-1}{2}$$

$$\Downarrow$$

$$-\frac{L-1}{2} < \sqrt[n]{a_n} - L$$

$$1 < \frac{L+1}{2} < \sqrt[n]{a_n}$$

$\left(\frac{L+1}{2}\right)^n < a_n$ $\longrightarrow$ טור הנדסי מתבדר

לפי מבחן ההשוואה הטור $\sum a_n$ מתבדר. מ.ש.ל.

דוגמאות:

①
$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\ln(n))^n}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\ln(n)} = 0$$

לכן מתכנס!

(2) $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^2}$$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{2^n}{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{(\underbrace{\sqrt[n]{n}}_{\to 1})^2} = 2$$

הטור מתבדר!

(3) $\sum \frac{1}{n}$ מתבדר

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n}} = 1$$

$\sum \frac{1}{n^2}$ מתכנס

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n^2}} = 1$$

מבחן ראבה:

נניח שקיים גבול $L = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) \cdot n$ אזי:

(1) $L > 1$ הטור מתכנס

(2) $L < 1$ הטור מתבדר

(3) $L = 1$ לא ברור

דוגמאות:

(1) $$\sum_{n=2}^{\infty} 5^{-(1+\frac{1}{2}+\dots+\frac{1}{n-1})}$$

מבחן המנה:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{5^{-(1+\frac{1}{2}+\dots+\frac{1}{n-1}+\frac{1}{n})}}{5^{-(1+\frac{1}{2}+\dots+\frac{1}{n-1})}} = 5^{-\frac{1}{n}}$$

$\lim_{n\to\infty} 5^{-\frac{1}{n}} = 1 \Longrightarrow$ מבחן המנה לא עוזר.

מבחן ראבה:

$$\lim_{n\to\infty} n\cdot\left(5^{\frac{1}{n}}-1\right)$$

∞ $\quad$ 0

לופיטל!

$$\lim_{n\to\infty}\frac{5^{\frac{1}{n}}-1}{\frac{1}{n}} \underset{x=\frac{1}{n}}{=} \lim_{x\to0}\frac{5^x-1}{x} \overset{L'H}{=} \lim_{x\to0}\frac{5^x\cdot\ln(5)}{1}=\ln(5)>1$$

הטור מתכנס!

(2)

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2\cdot4\cdot6\cdot\ldots\cdot2n}{3\cdot5\cdot7\cdot\ldots\cdot(2n+1)}$$

מבחן ראבה:

$$\frac{a_n}{a_{n+1}}=\frac{\cancel{2\cdot4\cdot6\cdot\ldots\cdot2n}}{\cancel{3\cdot5\cdot7\cdot\ldots\cdot(2n+1)}}\cdot\frac{\cancel{3\cdot5\cdot7\cdot\ldots\cdot(2n+1)}(2n+3)}{\cancel{2\cdot4\cdot6\cdot\ldots\cdot(2n)}\cdot(2n+2)}=\frac{2n+3}{2n+2}$$

$$\lim_{n\to\infty} n\cdot\left(\frac{2n+3}{2n+2}-1\right)=\lim_{n\to\infty} n\cdot\frac{1}{2n+2}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{2n+2}=\frac{1}{2}$$

לפי מבחן ראבה הטור מתבדר.

טורים כלליים!

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ $\quad$ a_n לא בהכרח חיובי.

תנאי הכרחי להתכנסות הטור: $a_n\to0$

$$\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$$

הגדרה:

הטור a_n נקרא מתכנס בהחלט כאשר $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ מתכנס.

טענה:

אם טור מתכנס בהחלט אז הוא מתכנס (בלי ערך מוחלט)

הוכחה:

הטור $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ מתכנס.

נביט בטור $\sum_{n=1}^{\infty}(|a_n|-a_n)$. הוא טור חיובי

$$|a_n|-a_n \le |a_n|+|a_n| = 2|a_n|$$

$\downarrow$

מתכנס. אז לפי מבחן ההשוואה גם הטור $\sum(|a_n|-a_n)$ מתכנס

$$\sum_{n=1}^{N} a_n = \sum_{n=1}^{N}\left(|a_n|-(|a_n|-a_n)\right) =$$

$$= \underbrace{\sum_{n=1}^{N}|a_n|}_{\text{שואף לגבול מספרי}} - \underbrace{\sum_{n=1}^{N}(|a_n|-a_n)}_{\text{שואף לגבול מספרי}}$$

הפרש של 2 סדרות מתכנסות גם מתכנס.

לכן $\sum_{n=1}^{N} a_n$ שואף לגבול מספרי כאשר $N\to\infty$. מ.ש.ל.

דוגמא:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}$$

הטור $\sum\frac{1}{n^2}$ מתכנס $\Longrightarrow$ גם הטור המקורי מתכנס.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}$$

$$= 1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\dots$$

לא מתכנס בהחלט. האם הוא מתכנס?

מבחן לייבניץ

תהי a_n סדרה יורדת מונוטונית ושואפת לאפס אזי:

$\sum(-1)^{n-1}\cdot a_n$ מתכנס

$$a_1-a_2\le\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\cdot a_n\le a_1$$

הוכחה:

נסמן) $S_N=\sum_{n=1}^{N}(-1)^{n-1}\cdot a_n$

ונוכיח ש- S_{2N} מתכנסת כאשר $N\to\infty$

$$S_{2N}=\underset{\geq 0}{(a_1-a_2)}+\underset{\geq 0}{(a_3-a_4)}+\dots+\underset{\geq 0}{(a_{2N-1}-a_{2N})}$$

לכן $S_{2N}\le S_{2N+2}$, כלומר S_{2N} סדרה מונוטונית עולה.

$$S_{2N}=a_1-\underbrace{(a_2-a_3)}_{\geq 0}-\underbrace{(a_4-a_5)}_{\geq 0}-\dots-\underbrace{(a_{2N-2}-a_{2N-1})}_{\geq 0}-\underset{\geq 0}{a_{2N}}$$

$$S_{2N}\le a_1$$

S_{2N} סדרה מונוטונית עולה וחסומה מלעיל.

לפי משפט ויירשטרס היא מתכנסת, כלומר קיים $\lim_{N\to\infty}S_{2N}$

נסמן את הגבול כ- S.

$$\lim_{N\to\infty}S_{2N+1}=\lim_{N\to\infty}(\underset{\downarrow S}{S_{2N}}+\underset{\downarrow 0}{a_{2N+1}})=$$

$$=\lim_{N\to\infty}S_{2N}+\lim_{N\to\infty}a_{2N+1}=S$$

הוכחנו שסדרת הסכומים החלקיים מתכנסת ל- S. מ.ש.ל.

לפי מבחן לייבניץ הטור $\sum \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ מתכנס,
אבל לא מתכנס בהחלט.

הגדרה:

אם טור מתכנס אבל לא מתכנס בהחלט אני אומרים שהטור מתכנס על תנאי.

$$\frac{1}{2} < S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} < 1$$

$$\ln(2)$$

$1=2$

$$S = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \frac{1}{9} - \frac{1}{10} + \dots$$

$$2S = 1 + \frac{2}{3} - \frac{1}{2} + \frac{2}{5} - \frac{1}{3} + \frac{2}{7} - \frac{1}{4} + \frac{2}{9} - \frac{1}{5} + \dots$$

$$= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \frac{1}{9} - \frac{1}{10} + \dots$$

$$2\cancel{S} = \cancel{S} \xRightarrow[S\neq 0]{} 2=1$$

משפט: (רימן)

אם טור $\sum a_n$ מתכנס על תנאי אז ע"י שינוי סדר האיברים שלו ניתן לקבל מספר כלשהו.

בטור שמתכנס בהחלט שינוי סדר המחוברים לא משנה את סכום הטור.

מבחן דיריכלה:

תהי a_n סדרה חיובית מונוטונית יורדת ושואפת ל-0.
תהי b_n סדרה שמקיימת $\left|\sum_{n=1}^{N} b_n\right| \le M$ עבור איזשהו מספר M. אז הטור
$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot b_n$$ מתכנס.

מקרה של לייבניץ $b_n = (-1)^{n-1}$

דוגמא:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n\cdot\frac{\pi}{2})}{n}$$

$$\boxed{\sin(n\cdot\frac{\pi}{2})} \cdot \frac{1}{n}$$

חיובית
מונוטונית
יורדת שואפת
ל-0.

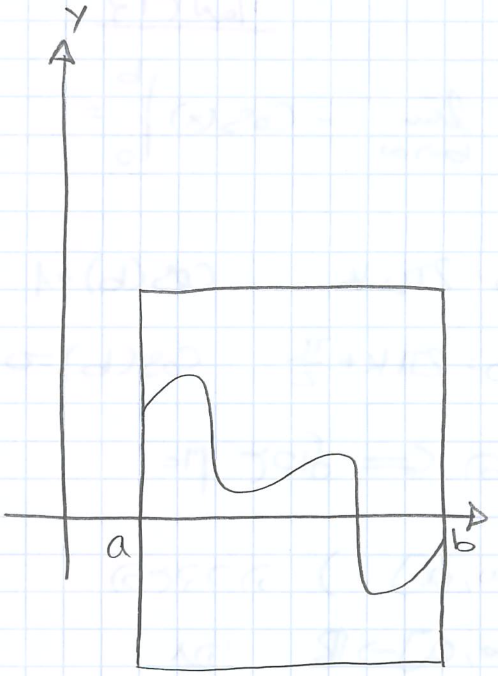
$$\sin(1\cdot\frac{\pi}{2}) + \sin(2\cdot\frac{\pi}{2}) + \dots + \sin(N\cdot\frac{\pi}{2})$$

$$1 \geq \left| 1 + 0 + (-1) + 0 + 1 + 0 + (-1) + \dots \right|$$

לפי מבחן דיריכלה הטור מתכנס.

אינפי - שיעור 9:

אינטגרלים מוכללים. (לא אמיתיים).



מסוג ראשון: הקטע הוא אינסופי.

(a,∞) או $(-\infty, a]$

או $(-\infty, \infty)$

הגדרה ($[a,\infty)$):

תהי $f:[a,\infty)\to\mathbb{R}$ פונקציה אינטגרבילית רימן בכל קטע סגור $[a,b]$ (לכל $b\geq a$). אם קיים גבול מספרי $\lim\limits_{b\to\infty}\int_a^b f(x)dx$ אז:

$$\int_a^\infty f(x)\,dx = \lim_{b\to\infty}\int_a^b f(x)\,dx$$

במקרה הזה אומרים שהאינטגרל $\int_a^\infty f(x)dx$ מתכנס.

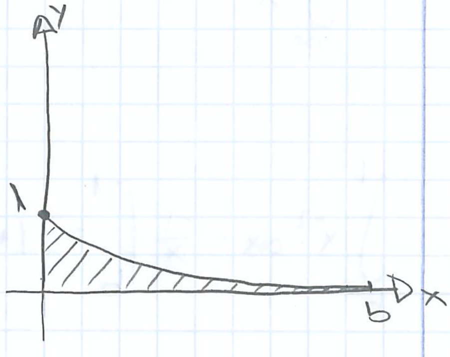
אם הגבול לא קיים או שווה ל- $\pm\infty$ אז אומרים שהאינטגרל מתבדר.

דוגמאות:

$$\int_0^\infty e^{-x}\,dx \longrightarrow \int_0^b e^{-x}dx = -e^{-x}\Big|_0^b = -e^{-b}+1$$

$$\lim_{b\to\infty}(1-e^{b}) = \lim_{b\to\infty}\left(1-\frac{1}{e^{b}}\right) = 1$$

$$\int_0^\infty e^{-x}\,dx = 1$$



דוגמא:

$$\int_0^\infty \sin(x)\,dx = \lim_{b\to\infty} \int_0^b \sin(x)\,dx = \lim_{b\to\infty} -\cos(x)\Big|_0^b =$$

$$= \lim_{b\to\infty} \left(-\cos(b)+1\right)$$

$b = 2\pi\cdot k \qquad \cos(b)=1$

$b = 2\pi k+\frac{\pi}{2} \qquad \cos(b)=0$

אין גבול $\Longrightarrow$ האינטגרל מתבדר.

הגדרה ($(-\infty,a]$):

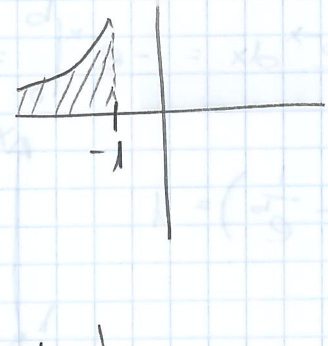
יהי $f:(-\infty,a]\to\mathbb{R}$ פונקציה אינטגרבילית רימן בכל קטע סגור $[b,a]$ (לכל $b\le a$). אם קיים גבול מספרי $\lim_{b\to-\infty}\int_b^a f(x)\,dx$ אז:

$$\int_{-\infty}^a f(x)\,dx = \lim_{b\to-\infty}\int_b^a f(x)\,dx$$

במקרה הזה אומרים שהאינטגרל $\int_{-\infty}^a f(x)dx$ מתכנס. אם הגבול לא קיים או שווה ל- $\pm\infty$ אז אומרים שהאינטגרל מתבדר.

דוגמאות:

$$\int_{-\infty}^{-1} \frac{1}{x^2}\,dx$$



$$\int_b^{-1} x^{-2}\,dx = \frac{-1}{x}\Big|_b^{-1} = 1+\frac{1}{b}$$

$$\lim_{b\to-\infty}\left(1+\frac{1}{b}\right)=1 \Longrightarrow \int_{-\infty}^{-1}\frac{1}{x^2}\,dx = 1$$

דוגמא:

$$\int_{-\infty}^{0} e^{-x}\,dx$$

$$\int_{b}^{0} e^{-x}\,dx = -e^{-x}\Big|_{b}^{0} = -1+e^{-b} = -1+\frac{1}{e^{b}}$$

$$\lim_{b\to-\infty}\left(-1+\frac{1}{e^{b}}\right)=\infty$$

האינטגרל $\int_{-\infty}^{0} e^{-x}dx$ מתבדר.

הגדרה ($(-\infty,\infty)$):

יהי $f:(-\infty,\infty)\to\mathbb{R}$ פונקציה אינטגרבילית רימן בכל קטע $[a,b]$. אזי:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{\substack{a\to-\infty\\ b\to\infty}} \int_{a}^{b} f(x)\,dx$$

אם הגבול קיים למספר, אז אומרים שהאינטגרל מתכנס.

טענה:

אם $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$ מתכנס $\Longleftarrow$ לכל c מתקיים:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{c} f(x)\,dx + \int_{c}^{\infty} f(x)\,dx$$

דוגמא:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2+1}\,dx$$

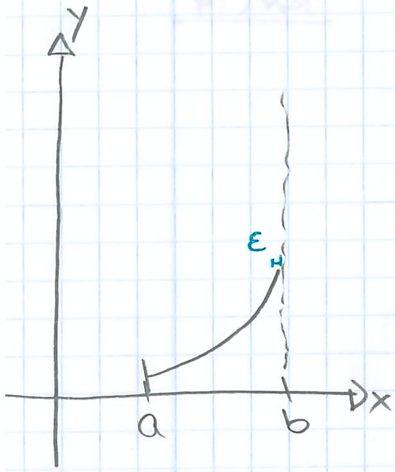
$$\int_{-\infty}^{0} \frac{1}{x^2+1}\,dx = \lim_{b\to-\infty} \arctan(x)\Big|_{b}^{0} = \lim_{b\to-\infty}\left(0-\arctan(b)\right) = \frac{\pi}{2}$$

$$\int_{0}^{\infty} \frac{1}{x^2+1}\,dx = \lim_{b\to\infty} \arctan\Big|_{0}^{b} = \lim_{b\to\infty}\left(\arctan(b)-0\right) = \frac{\pi}{2}$$

לכן

$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2+1}\,dx = \pi$ מתכנס.

אינטגרל מוכלל מסוג שני:



הפונקציה לא חסומה בקטע $[a,b)$

נניח שהפונקציה חסומה בכל קטע $[a,b-\varepsilon]$

אם פונקציה $f:[a,b)$ אינטגרבילית רימן בכל קטע $[a,b-\varepsilon]$ (לכל $\varepsilon>0$) אז ניתן להגדיר ע"י הנוסחה:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_a^{b-\varepsilon} f(x)\,dx$$

דוגמא:

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x}}\ ,\ \text{קטע}\ [0,1)$$

כלול

לא כלול כי לא מוגדר

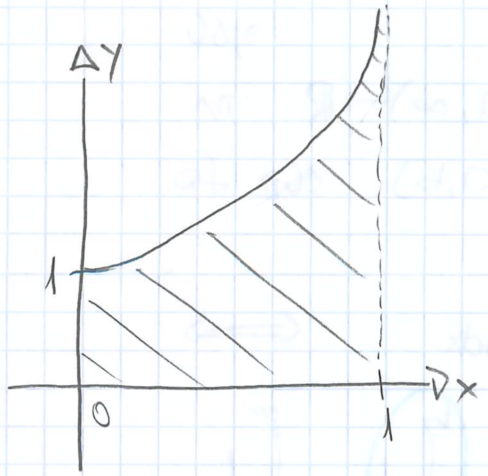
האם מתכנס האינטגרל

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x}}\,dx$$

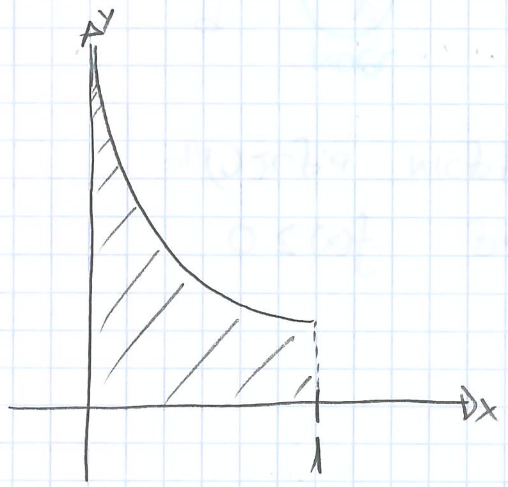
$$\int_0^{1-\varepsilon}(1-x)^{-0.5}\,dx = -\frac{(1-x)^{-0.5}}{0.5}\Bigg|_0^{1-\varepsilon} = -\frac{\varepsilon}{0.5}-\left(-\frac{1}{0.5}\right)=2-2\varepsilon$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_0^{1-\varepsilon}(1-x)^{-0.5} = \lim_{\varepsilon\to 0}(2-2\varepsilon)=2$$

מתכנס.



$$y=\frac{1}{\sqrt{1-x}}$$



דוגמא:

$y=\frac{1}{x}$ בקטע $(0,1]$

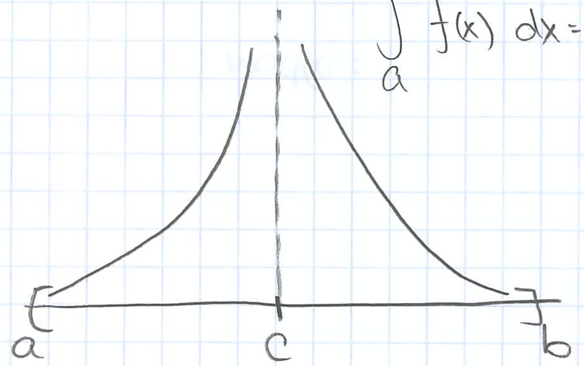
$$\int_0^1 \frac{1}{x}\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_\varepsilon^1 \frac{1}{x}\,dx =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0^+} \ln(x)\Big|_\varepsilon^1 = \lim_{\varepsilon\to 0^+}(-\ln(\varepsilon)) = \infty$$

לכן מתבדר.

אם פונקציה לא חסומה בנקודה $c\in(a,b)$ אז:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$



דוגמא:

$y=\frac{1}{x^2}$ בקטע $[-1,1]$

נקודה בע"ג"מ $x=0$

$$\int_{-1}^0 \frac{1}{x^2}\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_{-1}^{0-\varepsilon} \frac{1}{x^2}\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0^+}\left(\frac{-1}{x}\right)\Big|_{-1}^{-\varepsilon} =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0^+}\left(\frac{1}{\varepsilon}-1\right) = \infty$$ לכן צריך לחשב את הצד השני.

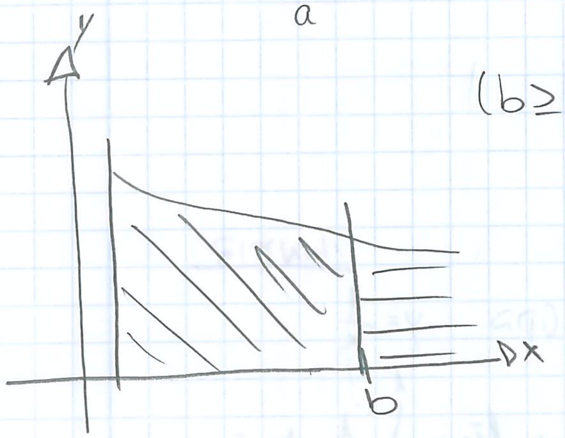
$\Downarrow$

$\int_{-1}^1 \frac{1}{x^2}\,dx$ האינטגרל מתבדר.

טענה:

תהי $f:[a,\infty)\to\mathbb{R}$ פונקציה אינטגרבילית רימן בכל קטע $[a,b]$ $(b\geq a)$. אזי $\int_a^\infty f(x)dx$ מתכנס $\Longleftrightarrow$

$\Longleftrightarrow$ $\int_b^\infty f(x)dx$ (לכל $b\geq a$)



$$\int_a^\infty f(x)dx=\int_a^b f+\int_b^\infty f$$

מספר

אינטגרלים מוכללים של פונקציות אי-שליליות.

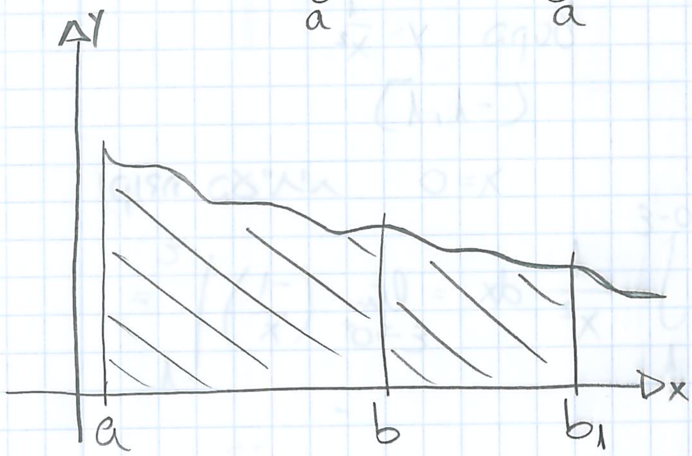
$f(x)\geq 0$ לכל x השייך לקטע I

$$F(b)=\int_a^b f(x)\,dx$$

$$\int_a^{b_1} f\,dx=\int_a^b f\,dx+\int_b^{b_1} f\,dx\geq 0$$

מסקנה:

$$b_1>b\Longrightarrow\int_a^{b_1} f\,dx\geq\int_a^b f\,dx$$



הפונקציה $F(b)=\int_a^b f(x)dx$ היא מונוטונית עולה.

אם F מונוטונית עולה בקטע $[a,\infty)$ אז הגבול $\lim_{b\to\infty} F(b)$ קיים $\Longleftrightarrow$ F חסומה בקטע $[a,\infty)$,

כלומר קיים מספר M כך ש-: $F(b)\le M$ לכל $b\in[a,\infty)$

אינטגרל $\int_a^\infty f(x)\,dx$ של פונקציה אי-שלילית מתכנס $\Longleftrightarrow$ הוא חסום.

טענה:

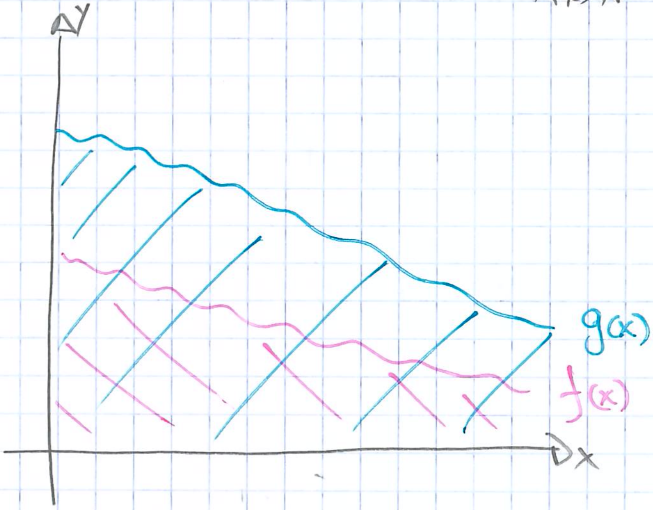
(מבחן ההשוואה של אינטגרלים מוכללים של פונקציות אי-שליליות):

תהיינה $f,g:[a,\infty)\to\mathbb{R}$ פונקציות אינטגרביליות על כל קטע סגור $[a,b]\subseteq[a,\infty)$. נניח ש- $0\le f(x)\le g(x)$ לכל $x\in[a,\infty)$ (אפשר $x\in[a_0,\infty)$). אז:

① אם $\int_a^\infty g(x)\,dx$ מתכנס, אז גם $\int_a^\infty f(x)\,dx$ מתכנס.

② אם $\int_a^\infty f(x)\,dx$ מתבדר אז $\int_a^\infty g(x)\,dx$ מתבדר.

דוגמא להמחשה:



הוכחה:

מהנתון נובע ש-:

$$(*)\quad \int_a^b f(x)\,dx \le \int_a^b g(x)\,dx$$

① אם $\int_a^\infty g(x)\,dx$ מתכנס, אז:

$\int_a^b g(x)\,dx \le M$ לכל $a\le b$. לכן

$\int_a^b f(x)\,dx \le M$ לכל $a\le b$ $\Longrightarrow$ $\int_a^\infty f(x)\,dx$ מתכנס.

(2) $\int_a^\infty f(x)dx$ מתבדר $\Longleftarrow \lim_{b\to\infty}\int_a^b f(x)dx = \infty$

(*) נפעיל lim על שני האגפים של

$\Longleftarrow \infty = \lim_{b\to\infty}\int_a^b f(x)\,dx \le \lim_{b\to\infty}\int_a^b g(x)\,dx$

$\Longleftarrow \lim_{b\to\infty}\int_a^b g(x)\,dx = \infty$. מ.ש.ל.

תרגול מצאות:

(1) $\int_1^\infty \frac{1}{x^2-x+1}\,dx$

$\int_1^\infty \frac{1}{x^2}\,dx$ מתכנס? $\longrightarrow$ $\frac{1}{x^2-x+1} < \frac{1}{x^2}$

חיובית.

$\lim_{b\to\infty}\int_1^b x^{-2}\,dx = \lim_{b\to\infty}\left(\frac{-1}{x}\right)\Big|_1^b = \lim_{b\to\infty}\left(\frac{-1}{b}+1\right) = 1$

האינטגרל $\int_1^\infty \frac{1}{x^2}dx$ מתכנס $\overset{\text{מבחן ההשוואה}}{\Longrightarrow}$ $\int_1^\infty \frac{1}{x^2-x+1}$ מתכנס.

(2) $\int_1^\infty \frac{1}{x-\sqrt{x}+1}\,dx$

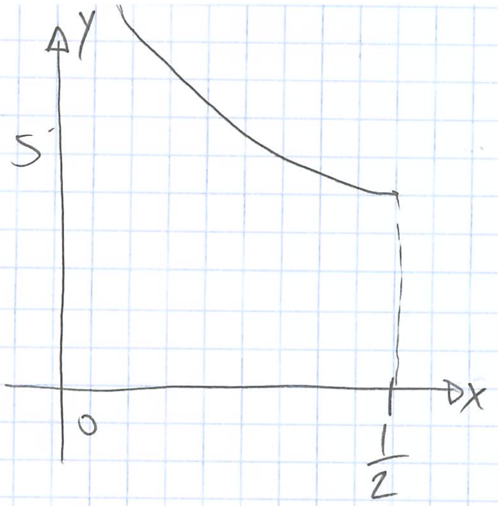
$\frac{1}{2x} \le \frac{1}{x-\sqrt{x}+1}$

$x-\sqrt{x}+1 \le 2x$

לכן בגלל $\int_1^\infty \frac{1}{2x}dx$ מתבדר $\Longrightarrow$ $\int_1^\infty \frac{1}{x-\sqrt{x}+1}\,dx$

.8

(3)



$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{x}-x}\,dx$$

$$\frac{1}{\sqrt{x}} \le \frac{1}{\sqrt{x}-x} \le \frac{5}{\sqrt{x}}$$

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = \int_0^{\frac{1}{2}} x^{-0.5}\,dx = \frac{x^{0.5}}{0.5}\Big|_0^{\frac{1}{2}}$$ מתכנס. לפי עוצר

$$\sqrt{x} < 5\sqrt{x} - 5x$$
$$5x < 4\sqrt{x}$$
$$25x^2 < 16x$$
$$x < \frac{16}{25}$$ ← בסדר כי האינטגרל עד $\frac{1}{2}$.

כאשר $0 \le x \le \frac{1}{2}$ מתקיים

$$\frac{1}{\sqrt{x}-x} < \frac{5}{\sqrt{x}}$$

מתכנס.

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{5}{\sqrt{x}}\,dx$$

מתכנס.

מבחן ההשוואה הגבולי:

תהיינה $f,g:[a,\infty)\to\mathbb{R}$ פונקציות אי-שליליות אינטגרביליות רימן בכל קטע $[a,b]$.

אם קיים הגבול: $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = L$ אזי:

(1) $0 < L < \infty \Longleftarrow$ האינטגרלים מתכנסים או מתבדרים ביחד.

(2) $L=0$ אזי מהתכנסות של $\int_a^\infty g$ נובעת התכנסות של $\int_a^\infty f$

(3) $L=\infty$ אזי מהתכנסות של $\int_a^\infty f$ נובעת התכנסות של $\int_a^\infty g$

דוגמא:

$$\int_1^\infty \frac{1}{x-\sqrt{x}+1}$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x-\sqrt{x}+1}}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{1-\frac{1}{\sqrt{x}}+\frac{1}{x}} = 1$$

לכן האינטגרלים $\int_1^\infty \frac{1}{x-\sqrt{x}+1}dx$ ו- $\int_1^\infty \frac{1}{x}dx$ מתכנסים או
מתבדרים יחד.

מתבדר.

דוגמא:

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{x}-x}\,dx$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{\sqrt{x}-x}}{\frac{1}{\sqrt{x}}} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{1-\sqrt{x}} = 1$$

במקום $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{x}-x}dx$ ניתן לבדוק $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$

מתכנס.

$$\int \frac{1}{\sqrt{x}-x}\,dx = \int \frac{1}{t-t^2}\,2\cdot t\,dt =$$

$$\sqrt{x}=t \to x=t^2 \to dx = 2t\cdot dt$$

$$2\int \frac{1}{1-t}\,dt = -2\ln(1-t)+C = -2\ln(1-\sqrt{x})+c$$

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{x}-x}\,dx = -2\ln(1-\sqrt{x})\Big|_0^{\frac{1}{2}} = \underline{-2\ln(1-\sqrt{0.5})}$$